This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

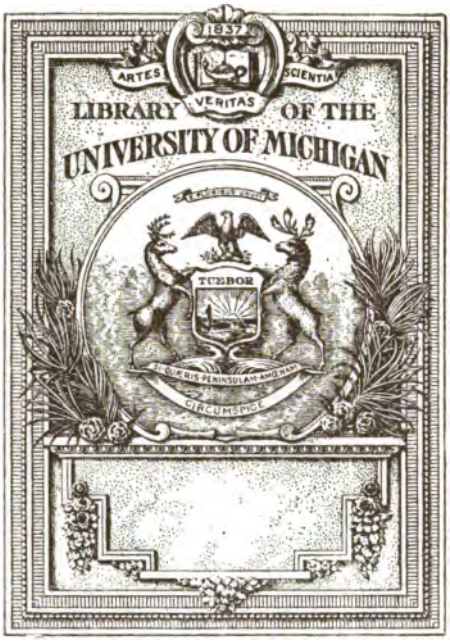
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET

QA
831
.C795

1261

Lehrbuch

der

Mechanik fester Körper

und

der Berechnung

des

Effektes der Maschinen.

Von

G. Coriolis,

Mitglied des Institutes von Frankreich, ehemaliger Professor und Studiendirektor an der polytechnischen Schule zu Paris, Oberingenieur des Brücken- und Wegebaues, etc. etc.

Deutsch herausgegeben

von

Dr. C. H. Schnuse.

Mit einer Figurentafel.

Braunschweig.

Verlag von G. C. E. Meyer sen.

1 8 4 6.

Prof. Alex. Ziwet
gt.
5-7-1923

G. Coriolis

Stachs

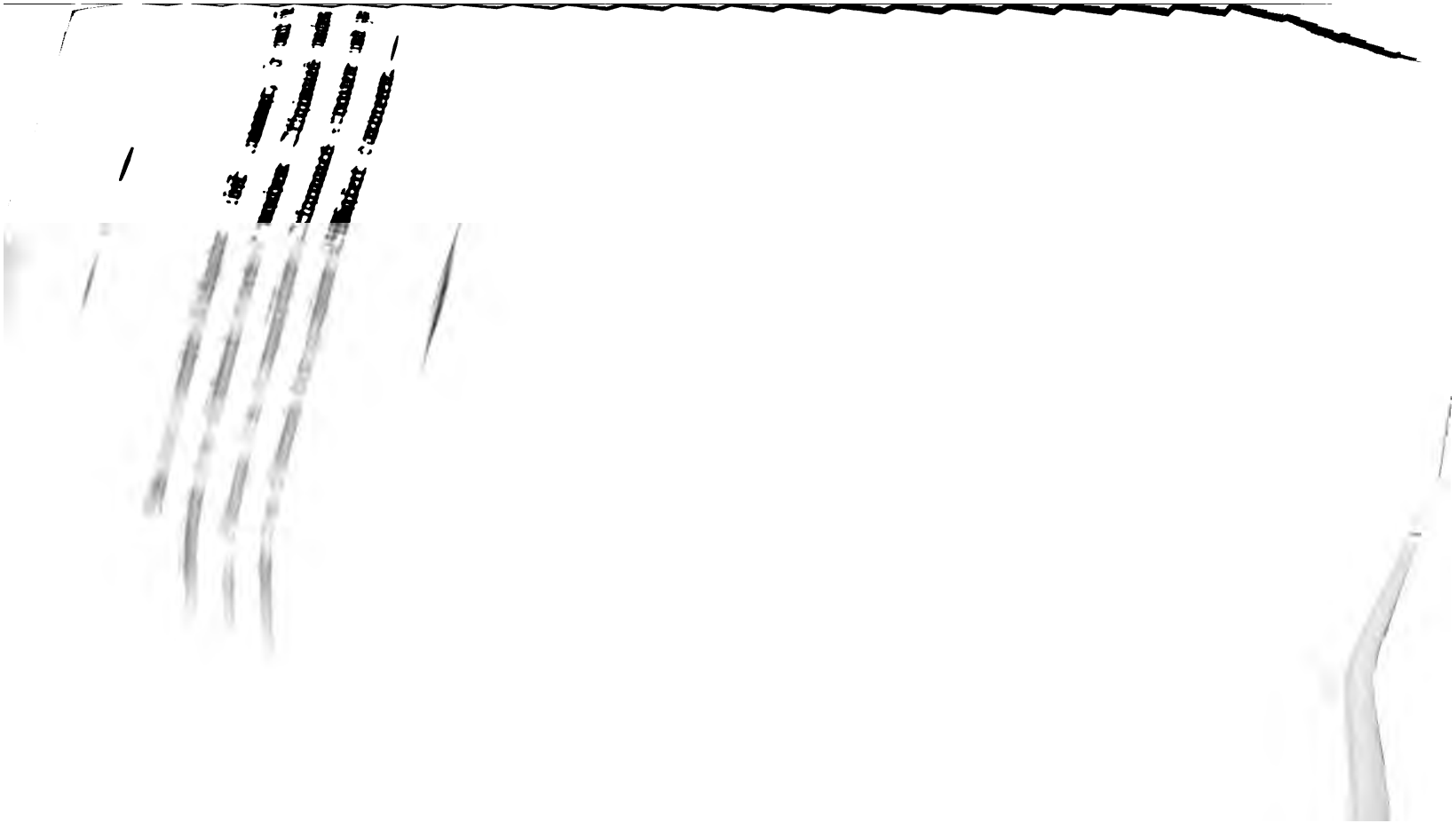
Vorwort des Ueberſetzers.

Jeder Kenner der techniſch-mechaniſchen Literatur weiß, daß Coriolis Leiſtungen in dieſem Zweige der Mathematik, gleich denen von Poncelet und Navier, zu den vorzüglichſten der neuern Zeit gehören.

9-17-32. KPT.

Der Zweck der deutſchen Herausgabe von Coriolis „Traité de la Mécanique des Corps solides et du Calcul de l'Effet des Machines, Séconde Édition, Paris 1845.“ welche ſchon durch den klaſſiſchen Werth des Werkes ſelbſt hinreichend gerechtfertigt würde, iſt zunächſt der: zu Poncelet's »Lehrbuch der Anwendung der Mechanik auf Maſchinen« als Einleitung und Ergänzung zu dienen, indem die erſte Abtheilung des gegenwärtigen Werkes die zum Studium der Maſchinen erforderlichen allgemeinen Lehren der Mechanik feſter Körper enthält, welche Poncelet vorausſetzt, und in der zweiten Abtheilung deſſelben Manches weiter ausgeführt wird, als bei Poncelet. —

424060



Inhaltsverzeichniß

der ersten Abtheilung.

Erstes Kapitel.

Geschwindigkeit, Kraft, Gewicht, Masse und Bewegung eines materiellen Punktes.

	§§.	Seite
Absolute und relative Bewegung	1	1
Geschwindigkeit	2	2
Trägheit und Kraft	5	4
Beschleunigung	6	6
Masse	8	8
Relation zwischen einer Kraft von veränderlicher Stärke und der Bewegung, welche sie hervorbringt	10	9
Erste Aufgabe: Wenn die Kraft F gegeben ist, die dadurch hervorgebrachte Bewegung zu bestimmen	11	10
Zweite Aufgabe: Wenn die Bewegung des Körpers gegeben ist, die Kraft zu finden, welche jeden Augenblick auf denselben wirkt	12	13
Krummlinige Bewegung	13	15
Zusammensetzung der Kräfte	14	17
Gleichungen für die krummlinige Bewegung	17	23
Bewegung schwerer Körper im leeren Raume	18	24
Ausdruck der Tangential- und Normalkomponenten der bewegenden Kraft	19	26

	§§.	Seite.
Bewegung eines materiellen Punktes nach einer gegebenen Kurve	21	32
Princip der Transmission oder Fortpflanzung der Arbeit bei der Bewegung eines materiellen Punktes	23	35
Relative Bewegung eines materiellen Punktes	27	40
Ausdruck der Kraft bei der relativen Bewegung	29	45
Princip der Uebertragung oder Fortpflanzung der Arbeit bei der relativen Bewegung eines materiellen Punktes	30	49
Princip der Uebertragung der Arbeit bei der relativen Bewegung, wenn sich die beweglichen Axen gleichförmig um eine gegebene Axe drehen	31	51
Gleichgewicht oder gegenseitige Aufhebung der auf einen materiellen Punkt wirkenden Kräfte	32	52
Bedingung des Gleichgewichtes eines materiellen Punktes durch das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten		53
Arbeit der gegenseitigen Einwirkung zweier materieller Punkte auf einander	33	54

Zweites Kapitel.

Bewegung eines festen Körpers	35	58
Princip der Uebertragung oder Mittheilung der Arbeit bei der Bewegung eines festen Körpers	—	—
Gleichungen der Bewegung eines freien festen Körpers	36	59
Princip über die Bewegung des Schwerpunktes eines festen Körpers	38	65
Gleichgewicht und Aequivalenz der auf einen festen Körper wirkenden Kräfte	39	69
Resultante eines Systemes paralleler Kräfte. — Mittelpunkt paralleler Kräfte. — Schwerpunkt	41	71
Bewegung eines beliebigen Systemes fester Körper oder einer beliebigen Maschine	42	75
Bewegung des Pendels	43	78
Trägheitsmoment	—	80
Allgemeine Gleichungen der Bewegung eines Systemes von festen Körpern, oder einer beliebigen Maschine, wenn die Reibungen unberücksichtigt bleiben	44	84

	§§.	Seite.
Gleichgewicht und Aequivalenz der auf ein beliebiges System von Körpern, oder auf irgend eine Maschine wirkenden Kräfte .	45	85
Princip der Uebertragung der Arbeit bei der Bewegung eines festen Körpers, wenn auf die Erschütternngen der Molekule desselben Rücksicht genommen wird	47	86
Lehrsatz zur Bestimmung der lebendigen Kraft	48	94
Princip der Uebertragung der Arbeit mit Rücksicht auf die Erschütterungen	49	97
Princip der Uebertragung der Arbeit für eine beliebige Maschine mit Berücksichtigung der Reibung	51	105
Bestimmung der durch die Reibung konsumirten Quantität Arbeit	52	108
Vom Stoße	53	110
Quantität oder Größe der Bewegung	—	111
D'Alembert's Princip bei dem Stoße fester Körper . . .	—	113
Der Fall, wo die Erschütterungen noch nach dem Stoße stattfinden	54	
Carnot's Lehrsatz	—	115
Princip über die Bewegung des Schwerpunktes eines Systemes von Körpern, oder einer Maschine	56	116
Princip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes . . .	—	118
Princip der Erhaltung der Momente der Quantitäten der Bewegung	57	—
Allgemeines Princip der Uebertragung oder Fortpflanzung der Arbeit	58	120
Bemerkungen über die Ausdehnung des Principes der Uebertragung der Arbeit auf biegsame und auf flüssige Körper . .	—	121

Drittes Kapitel.

Allgemeine Betrachtungen über die Maschinen, welche zur Uebertragung der Bewegung eines Bewegers dienen	59	123
Berechnung der Reibungen bei den Anwendungen	60	131
Berechnung des Druckes, welchen zwei Zähne des Eingriffes zweier Rotationssysteme, deren Bewegung nicht gleichförmig ist, auf einander ausüben	61	137
Reibung der Zahnräderwerke	62	142
Berechnung der Reibung für die schiefe Ebene und den Keil . .	63	146
Reibung der dreikantigen Schraube	64	150

	§§.	Seite.
Berechnung der Reibung in der Schraube ohne Ende	65	154
Steifigkeit der Seile	66	158
Rollende Reibung	67	162
Durch den Stoß verursachte Verluste an Arbeit	68	163
Mittelpunkt des Stoßes	—	—
Einrammen von Pfählen	—	173

Erste Abtheilung.

Erstes Kapitel.

Geschwindigkeit, Kraft, Gewicht, Masse und Bewegung eines materiellen Punktes.

Absolute und relative Bewegung.

§. 1. Wenn ein Körper seine Lage im Raume verändert, so sagen wir, daß er in Bewegung sei, und nennen diese Bewegung eine absolute, wenn wir die successiven Lagen des Körpers auf feste Punkte beziehen; aber wenn sich zwei Körper im Raume bewegen, und man betrachtet die Bewegung des einen in Beziehung auf den andern, so wird dieselbe eine relative Bewegung genannt, wovon man einen vollständigern und deutlichern Begriff gibt, wenn man sagt: daß die relative Bewegung diejenige ist, welche einer dieser beiden Körper für einen Beobachter anzunehmen scheint, welcher sich mit dem andern Körper fortbewegt, aber seine Lage als fest betrachtet. Von dieser Art sind alle Bewegungen, welche wir auf der Oberfläche der Erde beobachten, und welche wir für absolute Bewegungen halten, weil wir sie auf Punkte beziehen, die wir als fest betrachten. Dieser Umstand hat, wie wir in der Folge sehen werden, auf die Anwendungen der Mechanik weiter keinen Einfluß; allein diese Bewegungen sind in der That nur relative, weil sich die Punkte, worauf wir sie beziehen, mit der Erde im Raume fortbewegen.

Um die Untersuchungen über die Bewegung zu vereinfachen, wollen wir zunächst nur materielle Punkte, d. h. Körper betrachten, deren sämmtliche Dimensionen gegen die von ihnen durchlaufenen Räume als unendlich klein angesehen werden können.

Geschwindigkeit.

§. 2. Zur Beurtheilung der Bewegung eines materiellen Punktes im Raume muß man nothwendig zwei Elemente kennen, nämlich: 1) seine successiven Lagen, oder die durchlaufenen Räume, und 2) die Zeiten, welche dieser materielle Punkt gebraucht, um von einer dieser Lagen in die andere überzugehen, oder diese Räume zu beschreiben.

Wir wollen zunächst annehmen, daß sich der materielle Punkt nach einer geraden Linie fortbewegt und seine successiven Lagen auf einen in dieser geraden Linie angenommenen festen Punkt, z. B. auf die anfängliche Lage, welche man den Anfangspunkt der Bewegung nennt, beziehen. Es bezeichne e die Entfernung des materiellen Punktes von diesem Anfangspunkte nach Verlauf einer gewissen Anzahl von Zeiteinheiten, welche wir mit t bezeichnen wollen, wo diese Entfernung z. B. als positiv betrachtet wird, wenn sich der materielle Punkt zur Rechten des Anfangspunktes, und als negativ, wenn er sich zur Linken desselben befindet, und endlich im Anfangspunkte der Bewegung selbst $=0$ ist; d. h. wenn $t=0$ ist, so ist auch $e=0$.

Wenn das Verhältniß $\frac{e}{t}$ während der ganzen Bewegung einen konstanten Werth behält, d. h. wenn der Raum e der Zeit t stets proportional ist; so sagt man, die Bewegung ist gleichförmig, und diese ist die einfachste von allen möglichen Bewegungen. Die gleichförmigen Bewegungen unterscheiden sich durch die Größe des Verhältnisses $\frac{e}{t}$ von einander, und wenn dieses Verhältniß bei einer gleichförmigen Bewegung größer ist, als bei einer andern, oder wenn der nach Verlauf derselben Zeit t bei der ersten Bewegung durchlaufene Raum größer ist, als bei der zweiten; so nennt man die erste schneller, als die zweite, weshalb man auch das Verhältniß $\frac{e}{t}$ die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung nennt.

Wenn t in $t+\Delta t$ und e in $e+\Delta e$ übergeht, so daß Δt die zum Durchlaufen des Raumes Δe erforderliche Zeit ist; so hat man nach dem Begriffe der gleichförmigen Bewegung:

$$\frac{e}{t}=\frac{e+\Delta e}{t+\Delta t}, \quad \text{folglich} \quad \frac{e}{t}=\frac{\Delta e}{\Delta t}.$$

Das Verhältniß $\frac{\Delta e}{\Delta t}$ kann also eben so wohl, wie $\frac{e}{t}$ als Maß der Geschwindigkeit betrachtet werden, und zwar, wie klein die Zeit Δt auch sein mag. Wenn also dt ein unendlich kleines Zeitelement, d. h. welches kleiner ist, als jede angebbare Zeit, und de den während dieses Zeitelementes von dem materiellen

Punkte durchlaufenen Weg bezeichnet; so kann die Geschwindigkeit wieder durch das Verhältniß $\frac{de}{dt}$ ausgedrückt werden.

§. 3. Die Bewegung kann so beschaffen sein, daß das Verhältniß $\frac{e}{t}$, oder $\frac{\Delta e}{\Delta t}$, oder $\frac{de}{dt}$ nicht konstant bleibt; alsdann ist sie keine gleichförmige mehr, und wird deshalb eine veränderliche Bewegung genannt.

Es bezeichne *de* wieder den unendlich kleinen Weg, welchen der materielle Punkt nach Verlauf der Zeit *t* während des unendlich kleinen Zeitelementes *dt* durchläuft; so kann die Bewegung während dieser unendlich kleinen Zeit als gleichförmig betrachtet werden, und das Verhältniß $\frac{de}{dt}$ ist wieder der Ausdruck der Geschwindigkeit. Diese Geschwindigkeit $\frac{de}{dt}$, mit welcher sich der materielle Punkt bewegen würde, wenn er während einer endlichen Zeit die gleichförmige Bewegung beibehielte, welche er nur während einer unendlich kleinen Zeit beibehält, wird die Geschwindigkeit der veränderlichen Bewegung genannt, und ist nicht konstant, wie bei der gleichförmigen Bewegung, sondern nimmt jeden Augenblick einen andern Werth an.

Das bisher Gesagte läßt sich auch leicht geometrisch darstellen. Denn wir wollen annehmen, daß sich der materielle Punkt auf der vertikalen geraden Linie AE (Fig. 1) von A gegen E bewegt, während diese gerade Linie in derselben Ebene, welche die der Figur ist, parallel zu sich selbst so fortrückt, daß die Entfernungen AA′, AA″, etc. der Zeit proportional sind, und als Maß derselben dienen können; so ist leicht einzusehen, daß der materielle Punkt, wenn er sich auf der geraden Linie AE gleichförmig bewegt, während diese gerade Linie in der Ebene EAT gleichförmig fortrückt, in dieser Ebene eine gerade Linie A*m′m″* beschreibt. Denn wenn A′*m′* und A″*m″* zwei beliebige Räume darstellen, welche den durch AA′ und AA″ dargestellten Werthen von *t* entsprechen; so hat man nach den Begriffen der gleichförmigen Bewegung:

$$\frac{A'm'}{AA'} = \frac{A''m''}{AA''},$$

d. h. die drei Punkte A, *m′*, *m″* liegen in gerader Linie.

Wenn sich aber der materielle Punkt auf der geraden Linie AE nicht gleichförmig bewegt, während AE gleichförmig fortrückt; so kann derselbe auf der Ebene AET nur eine krumme Linie AM′M″ beschreiben, deren Abscissen die Werthe von *t* und deren Ordinaten die zugehörigen Werthe von *e* sind. Das Verhältniß $\frac{de}{dt}$ drückt alsdann bekanntlich die Neigung des Kur-

venelementes, deſſen Projektion *dt* iſt, gegen die Abſciſſenaxe AT aus, und obgleich dieſe Neigung von einem Punkte der Kurve zum andern veränderlich iſt; ſo kann ſie doch in der ganzen Ausdehnung des betrachteten Kurvenelementes als konſtant angeſehen werden, weil man dieſes Element als geradlinig betrachten kann. Ebenſo kann das Verhältniß $\frac{de}{dt}$ des unendlich kleinen Raumes *de* zu der zu ſeinem Beſchreiben erforderlichen unendlich kleinen Zeit *dt*, obgleich es ſich jeden Augenblick ändert, während der Zeit *dt* als konſtant, und folglich als der Ausdruck der Geſchwindigkeit während dieſer Zeit betrachtet werden.

§. 4. Wenn ſich der materielle Punkt zuerſt über dem Punkte A, oder überhaupt auf der Seite dieſes Punktes befindet, wo die poſitiven Entfernungen *e* genommen werden, und ſich dann dem Anfangspunkte A nähert; ſo entſprechen poſitiven Werthen von *dt* negative Werthe von *de*, weil *e* abnimmt, und $\frac{de}{dt}$ iſt alsdann negativ. Die Geſchwindigkeit des materiellen Punktes muß alſo in dieſem Falle als negativ betrachtet werden.

Wenn ſich der bewegliche Punkt zuerſt unter dem Anfangspunkte A, oder überhaupt auf der Seite deſſelben befindet, wo die negativen Entfernungen *e* genommen werden, und ſich dann dieſem Anfangspunkte A nähert; ſo hat *de* für poſitive Werthe von *dt* das entgegengeſetzte Zeichen von *e*, d. h. *de* iſt poſitiv, und folglich auch das Verhältniß $\frac{de}{dt}$. Die Geſchwindigkeit des materiellen Punktes muß alſo in dieſem Falle als poſitiv betrachtet werden.

Wenn der bewegliche Punkt wieder auf der Seite der negativen *e* liegt und ſich vom Anfangspunkte A entfernt, ſo hat *de* daſſelbe Zeichen als *e*, d. h. *de* iſt für poſitive Werthe von *dt* negativ, und folglich das Verhältniß $\frac{de}{dt}$ negativ. Die Geſchwindigkeit muß alſo in dieſem Falle als negativ betrachtet werden.

Kurz, die Geſchwindigkeit muß jedesmal als poſitiv betrachtet werden, wenn ſich der materielle Punkt in dem Sinne der poſitiven *e* bewegt, und als negativ, wenn er ſich in entgegengeſetztem Sinne bewegt.

Trägheit und Kraft.

§. 5. Die Erfahrung lehrt, daß ein Körper, welcher ſich mit einer gewiſſen Geſchwindigkeit nach einer gewiſſen Richtung bewegt, dieſe Richtung und dieſe Geſchwindigkeit deſto länger behält, oder wenigſtens zu behalten ſtrebt, jemehr die äußern Hinderniſſe, wie der Widerſtand der Luft, die Reibung, etc. beſeitigt werden,

und man muß daher annehmen, daß der materielle Punkt seine ursprüngliche Geschwindigkeit und Richtung fortwährend beibehalten würde, wenn seine Bewegung durch keine fremdartige Ursache geändert würde.

Die Erfahrung lehrt auch, daß, wenn ein Körper oder materieller Punkt aus dem Zustande der Ruhe in den der Bewegung übergeht, dieses immer vermöge einer fremden Ursache geschieht. Diese Eigenschaft der Materie, daß sie ihren Zustand der Bewegung, oder der Ruhe nicht von selbst ändern kann, wird die Trägheit oder das Beharrungsvermögen derselben genannt, und jede Ursache, welche den Zustand der Bewegung, oder der Ruhe eines Körpers verändert, oder zu verändern strebt, nennt man eine Kraft.

Bei einer Kraft ist dreierlei zu unterscheiden: 1) der Punkt, auf welchen sie wirkt, ihr Angriffspunkt; 2) ihre Richtung, d. h. die Richtung und der Sinn der geraden Linie, nach welcher sich der Körper oder materielle Punkt bewegen würde, wenn er der Wirkung dieser Kraft folgte, und 3) die Intensität oder Stärke dieser Kraft, welche sich, wie wir sogleich sehen werden, wie alle übrigen Größen, durch Zahlen ausdrücken läßt.

Die erste Idee der Kraft erhalten wir durch die Anstrengung oder den Druck, welchen wir ausüben müssen, um einen Körper gegen die Wirkung der Schwere in Ruhe zu erhalten, oder denselben nach einer gewissen Richtung fort zu ziehen oder zu schieben, so daß seine Geschwindigkeit allmählich zunimmt. Wenn man in beiden Fällen zwischen den Körper und die Hand, welche denselben in Ruhe erhält, oder fortbewegt, eine Federwage (Dynamometer) bringt, so erfährt die Feder eine gewisse Biegung, welche von der Stärke der wirkenden Kraft abhängt, und wenn zwei Kräfte unter denselben Umständen successive dieser Feder dieselbe Biegung geben; so müssen sie offenbar als vollkommen gleich angesehen werden. Denkt man sich alsdann, daß diese beiden gleichen Kräfte gleichzeitig und in demselben Sinne auf die Feder wirken, und durch ihre vereinte Wirkung dieser Feder einen neuen Grad von Biegung ertheilen; so muß jede Kraft, welche unter denselben Umständen für sich allein dieselbe Biegung der Feder bewirken kann, als der Summe der beiden ersten Kräfte oder dem Doppelten jeder derselben gleich betrachtet werden. Man sieht leicht ein, daß man auf dieselbe Weise darthun kann, daß eine Kraft das Dreifache, Vierfache, etc. einer andern Kraft ist, und wenn man die Kraft zur Einheit nimmt, welche einer gegebenen Feder eine bestimmte Biegung ertheilen kann; so kann man die Kräfte, wie alle übrigen Größen, messen, und folglich durch Zahlen ausdrücken.

Beschleunigung.

§. 6. Wir wollen nun die Relationen zu bestimmen suchen, welche zwischen den Kräften und den durch sie hervorgebrachten Bewegungen statt finden, und zunächst den Fall betrachten, wo diese Kräfte beständig nach der Richtung der Geschwindigkeit des materiellen Punktes wirken, also die Bewegung desselben eine geradlinige ist. Die Erfahrung hat gelehrt, daß die Wirkung einer Kraft auf einen Körper von der Geschwindigkeit unabhängig ist, welche dieser Körper schon hat, so daß diese Kraft, wenn sie einem ruhenden Körper während einer bestimmten Zeit eine gewisse Geschwindigkeit ertheilen kann, demselben bereits in Bewegung befindlichen Körper genau dieselbe Geschwindigkeitszunahme ertheilt.

Hieraus folgt: daß die Wirkung einer konstanten Kraft auf einen sich bereits mit einer gewissen Geschwindigkeit bewegenden Körper darin besteht, diese Geschwindigkeit in gleichen Zeiten um gleiche Größen zu vermehren. Wenn also u die anfängliche Geschwindigkeit des Körpers bezeichnet, und diese Geschwindigkeit nimmt während des Zeittheilchens Δt um Δu zu; so nimmt sie während eines zweiten Zeittheilchens Δt wieder um dieselbe Größe Δu zu, und das Verhältniß $\frac{\Delta u}{\Delta t}$ bleibt konstant, so lange die Kraft konstant bleibt. Dieses Verhältniß $\frac{\Delta u}{\Delta t}$, welches wir mit φ bezeichnen wollen, wird die Beschleunigung genannt, und dasselbe drückt in der That die Geschwindigkeitszunahme Δu aus, wenn die entsprechende Zeitdauer Δt zur Einheit genommen wird.

Wenn F die Kraft bezeichnet, welche die Beschleunigung φ hervorbringt, und F ist konstant; so ist φ offenbar auch konstant, und wenn sich F während der Dauer der Bewegung ändert, so lehrt die Beobachtung, daß sich das Verhältniß φ auf gleiche Weise ändert, d. h. die Werthe von φ bleiben denen von F proportional. Wenn also die Beschleunigung φ konstant ist, so wird sie auch durch eine konstante Kraft hervorgebracht.

Der freie Fall eines schweren Körpers im leeren Raume bietet ein Beispiel von einer Bewegung dar, worin die Beschleunigung konstant ist. Diese Beschleunigung, welche man mit g zu bezeichnen pflegt, beträgt auf der Sternwarte zu Paris für jede Sekunde $9^m,8088$, woraus folgt, daß die Kraft, welche den Fall der Körper bewirkt, d. h. die Schwerkraft, eine konstante Kraft ist, oder daß das Gewicht eines Körpers während der ganzen Dauer seines Falles dasselbe bleibt.

Wenn p das Gewicht eines Körpers und F die Kraft bezeichnet, welche demselben in der Sekunde eine Beschleunigung φ ertheilen kann; so hat man wegen der Proportionalität zwischen den Werthen von F und φ die Relation:

$$\frac{\varphi}{g} = \frac{F}{p}, \qquad \text{folglich} \quad \varphi = g\frac{F}{p}.$$

Die Erfahrung lehrt ferner, daß, wenn eine Kraft F succeſſive auf zwei Körper von verſchiedenen Gewichten p und p' wirkt, die Beſchleunigungen φ und φ', welche ſie denſelben ertheilt, im umgekehrten Verhältniſſe dieſer Gewichte ſtehen, ſo daß man hat:

$$\varphi' = \frac{p}{p'}\varphi,$$

oder wenn man für φ ſeinen Werth $\frac{g}{p}F$ ſetzt:

$$\varphi' = \frac{gF}{p'}.$$

Die Relation $\varphi = \frac{gF}{p}$, welche für denſelben Körper und für verſchiedene Werthe der Kraft F ſtatt findet, behält alſo auch ihre Gültigkeit, wenn man von einem Körper zu einem andern übergeht, und mithin werden die Geſetze der geradlinigen Bewegung, welche von einer Kraft hervorgebracht wird, die während der Dauer dieſer Bewegung konſtant bleibt, durch die eine Gleichung:

$$\varphi \text{ oder } \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{gF}{p}$$

ausgedrückt.

§. 7. In dem Vorhergehenden haben wir vorausgeſetzt, daß die Kraft nach dem Sinne der Geſchwindigkeit ſelbſt wirkt; aber wenn ſie in entgegengeſetztem Sinne wirkte, ſo würde ſie nicht eine Zunahme, ſondern eine Abnahme der Geſchwindigkeit hervorbringen, und die Größe Δu, folglich auch $\frac{\Delta u}{\Delta t}$ oder φ müßte alsdann das entgegengeſetzte Zeichen der anfänglichen Geſchwindigkeit u haben. Wenn man F und u als poſitiv betrachtet, wenn der Sinn ihrer Richtung der iſt, in welchem die poſitiven Entfernungen e zunehmen, und als negativ, wenn ſie einen entgegengeſetzten Sinn haben; ſo haben die Größen F und φ immer daſſelbe Zeichen, und die Relation:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{gF}{p}$$

findet ſowohl in Beziehung auf die Zeichen, als in Beziehung auf die Zahlenwerthe ſtatt.

Masse.

§. 8. Die von der Schwere herrührende Beschleunigung g ist nicht in allen Punkten der Erdoberfläche dieselbe, und z. B. unter dem Aequator etwas geringer, als zu Paris; aber wenn sich die Größe g ändert, so ändert sich das Gewicht der Körper auch in demselben Verhältnisse, so daß für denselben Körper das Verhältniß $\frac{p}{g}$ seines Gewichtes zu der Beschleunigung g eine konstante Größe ist, in welchem Punkte der Erdoberfläche sich dieser Körper auch befinden mag. Dieses Verhältniß $\frac{p}{g}$, welches sich von dem einen Körper zu dem andern ändert, aber für denselben Körper konstant ist, wird die Masse dieses Körpers genannt. Da man mit diesem letzten Ausdrucke gewöhnlich die Quantität der Materie bezeichnet, woraus ein Körper besteht, so haben wir noch näher zu zeigen, worauf sich diese letzte Bedeutung des Verhältnisses $\frac{p}{g}$ gründet.

Wenn man zwei völlig identische Körper zu einem einzigen vereinigt, so daß dieser zuverlässig die doppelte Quantität Materie enthält; so ergibt sich, daß auch das Gewicht doppelt so groß geworden, aber die Beschleunigung g ungeändert geblieben ist, und folglich hat sich der Werth des Verhältnisses $\frac{p}{g}$ mit der Quantität der Materie zugleich verdoppelt, und im Allgemeinen findet man bei Körpern von derselben Substanz, daß sich die Quantität der Materie und das Verhältniß $\frac{p}{g}$ proportional ändern, so daß letzteres als Maß der erstern dienen kann. Bei verschiedenen Substanzen kann man zwar nicht unbedingt behaupten, daß einem doppelten Werthe von $\frac{p}{g}$ eine doppelte Quantität der Materie entspricht; allein die Analogie führt zu dieser Annahme, wodurch sich übrigens allein erklären läßt, wie das Gewicht doppelt so groß werden kann, ohne daß sich die Beschleunigung geändert hat. Die Quantität der Materie, oder die Masse eines Körpers kann folglich durch das Verhältniß $\frac{p}{g}$, welches man gewöhnlich durch m bezeichnet, ausgedrückt werden. Man kann auch sagen: daß die Masse eines Körpers das Gewicht ist, welches er haben würde, wenn man denselben in eine Entfernung von der Erde bringen könnte, wo die Beschleunigung g der Längeneinheit, d. h. $= 1$ Meter ist; denn alsdann reducirte sich das Verhältniß $\frac{p}{g}$ auf p.

§. 9. In Frankreich, und bei wissenschaftlichen Untersuchungen sehr oft auch in Deutschland, nimmt man das Kilogramm

oder das Gewicht von 1 Liter destillirtem Wasser bei der Temperatur von 4°,1, auf der pariser Sternwarte bestimmt, zur Einheit des Gewichtes, oder allgemein, zur Einheit der Kraft.

Die Beschleunigung φ ist eine Länge, nämlich diejenige, welche der materielle Punkt in der Sekunde durchlaufen würde, wenn er sich während dieser Zeit mit der konstanten Geschwindigkeit bewegte, um welche seine Geschwindigkeit unter der Wirkung der Kraft F während derselben Zeit zugenommen hat. Die Einheit von φ ist folglich das Meter, wie die von g oder $9^{m},8088$. Die Gleichung $\varphi = g\frac{F}{p}$ ist folglich homogen und drückt die Gleichheit zweier Längen aus, weil das Verhältniß $\frac{F}{p}$ eine abstrakte Zahl ist.

Diese Gleichung läßt sich auf eine andere Form bringen, wenn man den Begriff der Masse in dieselbe einführt; denn setzt man $\frac{p}{g} = m$, so verwandelt sie sich in folgende:

$$\varphi = \frac{F}{m} \text{ oder } F = m\varphi.$$

Relation zwischen einer Kraft von veränderlicher Stärke und der Bewegung, welche sie hervorbringt.

§. 10. Die Kraft F kann auch, statt konstant zu sein, ihre Intensität oder Stärke jeden Augenblick ändern, und dabei stets die konstante Richtung der Geschwindigkeit des bewegten Punktes beibehalten. Wenn man sich die Zeit in sehr kleine Intervalle Δt getheilt vorstellt, so kann man annehmen, daß die Kraft F während der Dauer eines solches Zeittheiles Δt nahe zu konstant bleibt, und alsdann hat man während dieser Zeit:

$$\varphi = \frac{\Delta u}{\Delta t} = g\frac{F}{p},$$

wie klein das Zeitintervall Δt auch sein mag. Da die Beobachtung gezeigt hat, daß diese Gleichung wirklich für sehr kleine Zeitintervalle stattfindet, so nimmt man an, daß sie auch für unendlich kleine Zeittheilchen statt findet, und daß man folglich in aller Strenge hat:

$$\frac{du}{dt} = g\frac{F}{p},$$

wo $\frac{du}{dt}$ die Grenze von $\frac{\Delta u}{\Delta t}$ bezeichnet, wenn sich Δt ohne Ende

dem Werthe Null nähert. Diese Formel wird übrigens durch die daraus abgeleiteten Folgerungen, welche mit der Beobachtung übereinstimmen, als richtig bestätigt, und man sieht leicht ein, daß sie sowohl für die Zeichen, wie für die absoluten Werthe stattfindet.

Vermittelst dieser Gleichung kann man alle Aufgaben über die geradlinige Bewegung der Körper oder materiellen Punkte lösen, wobei wir uns jedoch hier nicht aufhalten, sondern blos die beiden Hauptaufgaben näher erörtern wollen, um wenigstens zu zeigen, auf welche Maßeinheit jede Größe bezogen werden muß.

Hauptaufgaben über die geradlinige Bewegung der Körper.

§. 11. **Erste Aufgabe:** Wenn die Kraft F gegeben ist, die dadurch hervorgebrachte Bewegung zu bestimmen.

Aufl. Wir wollen zunächst annehmen, daß die Kraft F konstant und sowohl, als das Gewicht p des Körpers in Kilogrammen gegeben ist; so ist nach §. 6 die Beschleunigung der Geschwindigkeit in der Sekunde konstant und $= g\frac{F}{p}$, welches, wie g, Meter ausdrückt. Wenn t die Anzahl der seit dem Augenblicke, wo die Geschwindigkeit des Körpers $= u_0$ war, verflossenen Sekunden und u seine Geschwindigkeit am Ende dieser Zeit bezeichnet; so wird die Beschleunigung der Geschwindigkeit $u - u_0$ für die Zeit t folglich ausgedrückt durch $g\frac{F}{p}t$, und man hat:

$$u = u_0 + g\frac{F}{p}t. \qquad (1)$$

Wenn e den Raum bezeichnet, den der Körper seit dem Augenblicke, von welchem an die Zeit t gezählt wird, und wo die Geschwindigkeit $= u_0$ ist, beschrieben hat; so hat man nach §. 3:

$$u = \frac{de}{dt},$$

woraus folgt, wenn man integrirt:

$$e = u_0 t + g\frac{F}{p}\frac{t^2}{2}. \qquad (2)$$

Die durch diese Gleichung ausgedrückte Bewegung wird eine gleichförmig veränderliche genannt, wovon der vertikale Fall schwerer Körper im leeren Raume das bemerkenswertheste Beispiel darbietet. Wenn die Kraft F, wie wir bisher vorausge-

setzt haben, in dem Sinne der anfänglichen Geschwindigkeit u_0 wirkt; so nimmt der Raum e fortwährend mit der Zeit t zu, und bleibt immer positiv; aber wenn die Kraft F in dem entgegengesetzten Sinne von dem der anfänglichen Geschwindigkeit u_0 wirkt, so muß man in der Gleichung (1) das Zeichen des Gliedes, worin die Kraft F vorkommt in das entgegengesetzte verwandeln. In diesem Falle hat der Raum e einen größten positiven Werth, und wenn die Zeit t nach Erreichung desselben noch weiter zunimmt; so nimmt der Raum e wieder ab, wird Null, dann negativ und nimmt in negativem Sinne fortwährend zu.

Wenn der Körper, auf welchen eine konstante Kraft F wirkt, von der Ruhe ausgeht, so hat man blos:

$$u = g\frac{Ft}{p}$$

und:

$$e = g\frac{F}{p}\frac{t^2}{2}.$$

Die Kraft F kann also ausgedrückt werden durch:

$$F = \frac{2e}{gt^2}p.$$

Bei dem vertikalen Falle schwerer Körper im leeren Raume ist $F = p$, und wenn man der Kürze wegen $u_0 = 0$ setzt; so reduciren sich die Gleichungen (1) und (2) auf:

$$u = gt \text{ und } e = \frac{gt^2}{2},$$

und wenn man t eliminirt, so erhält man:

$$e = \frac{u^2}{2g}, \text{ oder } u = \sqrt{2ge}.$$

Wenn der Körper mit einer Geschwindigkeit u in vertikaler Richtung von unten nach oben bewegt wird, so läßt sich leicht zeigen, daß die größte Höhe, welche er erreicht, durch die Gleichung:

$$e = \frac{u^2}{2g}$$

gegeben wird. Diese Relation zwischen dem beschriebenen Raume e und der Geschwindigkeit u wird in der Mechanik sehr häufig

angewandt. Bei dem Falle schwerer Körper pflegt man den Raum e gewöhnlich mit h zu bezeichnen, der Ausdruck $\frac{u^2}{2g}$ wird die der Geschwindigkeit u entsprechende Fallhöhe und der Ausdruck $\sqrt{2gh}$ die der Fallhöhe h entsprechende Geschwindigkeit genannt.

Wir wollen nun annehmen, daß die Kraft F veränderlich sei, so kann dieselbe als eine Funktion der Zeit t, oder des Raumes e, oder endlich der Geschwindigkeit u gegeben sein, und in allen drei Fällen hat man nach §. 10:

$$\varphi \text{ oder } \frac{du}{dt} = g.\frac{F}{p}. \qquad (3)$$

Wenn die Kraft F als Funktion der Zeit gegeben ist, so daß $F = f(t)$ ist; so verwandelt sich die Gleichung (3) in folgende:

$$du = \frac{g}{p} f(t)\, dt$$

und gibt:

$$u = u_0 + \frac{g}{p}\int_0^t f(t)\, dt,$$

folglich:

$$e = u_0 t + \frac{g}{p}\int_0^t dt \int_0^t f(t)\, dt.$$

Wenn die Kraft F als Funktion des Raumes e gegeben, also $F = f(e)$ ist, so erhält man, wenn man den ersten Theil der Gleichung (3) mit u und den zweiten mit $\frac{de}{dt}$ multiplicirt:

$$u\,du = \frac{g}{p} f(e)\, de,$$

und wenn u_0 die dem Raume e_0 entsprechende Geschwindigkeit bezeichnet; so hat man, wenn man integrirt:

$$u^2 = u_0^2 + \frac{2g}{p}\int_{e_0}^{e} f(e)\, de.$$

Hieraus ergibt sich:

$$u = \frac{de}{dt} = \sqrt{u_0^2 + \frac{2g}{p}\int_{e_0}^{e} f(e)\, de},$$

folglich:

$$dt = \frac{de}{\sqrt{u_0^2 + \frac{2g}{p}\int_{e_0}^{e} f(e)\,de}},$$

und mithin:

$$t = \int_{e_0}^{e} \frac{de}{\sqrt{u_0^2 + \frac{2g}{p}\int_{e_0}^{e} f(e)\,de}},$$

Wenn die Kraft F als Funktion der Geschwindigkeit u gegeben, also $F = f(u)$ ist; so verwandelt sich die Gleichung (3) in folgende:

$$\frac{du}{dt} = \frac{g}{p} f(u),$$

woraus folgt:

$$dt = \frac{p}{g}\frac{du}{f(u)},$$

und wenn u_0 die $t = 0$ entsprechende anfängliche Geschwindigkeit ist; so erhält man, wenn man integrirt:

$$t = \frac{p}{g}\int_{u_0}^{u} \frac{du}{f(u)}.$$

Wenn man diese letzte Integration verrichten und $u = \psi(t)$ oder $\frac{de}{dt} = \psi(t)$ erhalten kann, so ergibt sich:

$$e = \int_0^t \psi(t)\,dt.$$

§. 12. **Zweite Aufgabe:** Wenn die Bewegung des Körpers gegeben ist, die Kraft zu finden, welche jeden Augenblick auf denselben wirkt.

Aufl. Da die Bewegung des Körpers bekannt ist, so kann der Raum e als eine gegebene Funktion der Zeit betrachtet werden, so daß man $e = f(t)$ hat. Hieraus ergibt sich durch Differenzirung:

$$\frac{de}{dt} = u = f'(t) \text{ und } \frac{du}{dt} = \varphi = f''(t),$$

und da die Beſchleunigung φ durch $g\,\frac{F}{p}$ ausgedrückt wird; ſo kommt:

$$g.\frac{F}{p}=f''(t),\ \text{folglich}\ F=\frac{p}{g}.f''(t).$$

Da t hier immer eine Anzahl von Sekunden und $f(t)$ eine Länge ausdrückt, weil $f(t)=e$ iſt; ſo drücken die Ableitungen $f'(t)$ und $f''(t)$ auch Längen aus, und F drückt eine Anzahl von Kilogrammen aus, welche man erhält, wenn man das Gewicht p des Körpers durch das Verhältniß $\frac{f''(t)}{g}$ zweier Längen, d. h. durch eine abſtrakte Zahl multiplicirt.

Wenn ſich der Körper vertikal auf- oder niederwärts bewegt, ſo iſt ſein Gewicht p ſchon eine Kraft, welche ſucceſſive auf ihn wirkt, und wenn man die Kraft F' wiſſen will, welche man jeden Augenblick zu dieſem Gewichte hinzufügen, oder davon hinwegnehmen muß, damit ſich der Körper mit einer gegebenen Bewegung auf- oder abwärts bewegt; ſo hat man zur Beſtimmung dieſer Kraft die Gleichung:

$$p+F'=\frac{p}{g}f''(t),\ \text{folglich}\ F'=p\left[\frac{f''(t)}{g}-1\right].$$

Jenachdem alſo $f''(t)$ größer, oder kleiner als g iſt, iſt die Kraft F' poſitiv, oder negativ, d. h. ſie wirkt in dem Sinne von p, oder in dem entgegengeſetzten Sinne.

Wenn z. B. ein Körper auf einer horizontalen Ebene liegt, welche ſich mit einer gleichförmigen Bewegung abwärts bewegt; ſo iſt der Druck, welchen dieſe Ebene von unten nach oben auf den Körper, oder der Druck, welchen dieſer Körper von oben nach unten auf die Ebene ausübt, dem Gewichte des Körpers gleich, wie wenn die Ebene, worauf der Körper ruht, unbeweglich wäre. Denn da ſich dieſer Körper gleichförmig, d. h. ſo niederwärts bewegen ſoll, daß ſich die beſchriebenen Räume wie die Zeiten verhalten; ſo iſt die Gleichung ſeiner Bewegung von der Form:

$$e=e_0+At,$$

d. h. in dieſem Falle iſt die Function $f(t)=e_0+At$. Man hat alſo:

$$f'(t)=A\quad\text{und}\quad f''(t)=0$$

und folglich iſt der Druck, welchen die Ebene auf den Körper ausübt, $F'=-p$ und der, welchen der Körper auf die Ebene ausübt, mithin $=+p$, d. h. gleich dem Gewichte des Körpers.

Krummlinige Bewegung.

§. 13. Bisher haben wir vorausgesetzt, daß die Kraft in der Richtung der Geschwindigkeit des Körpers selbst wirkt, in welchem besondern Falle die Bewegung geradlinig ist, und wir wollen nun untersuchen, was statt findet, wenn die Kraft jeden Augenblick nach einer andern Richtung, als die der Geschwindigkeit des Körpers wirkt, in welchem Falle die hervorgebrachte Bewegung eine krummlinige ist; aber zuvor ist erforderlich, daß wir einige neue Begriffsbestimmungen über die Geschwindigkeiten und Kräfte festsetzen.

Zusammensetzung der Geschwindigkeiten.

Wenn sich ein materieller Punkt mit einer Geschwindigkeit $\omega = \frac{de}{dt}$ bewegt, deren Richtung mit drei rechtwinkligen Koordinatenaxen die Winkel α, β, γ bildet, und man projicirt jeden Augenblick die Lage dieses Punktes auf diese Axen; so kann man jede Projektion als einen Punkt betrachten, welcher sich auf der entsprechenden Axe bewegt. Die Projektion des beweglichen Punktes auf die Axe der x z. B. beschreibt auf dieser Axe während des Zeitelementes dt einen unendlich kleinen Weg dx, welcher nichts anders ist, als die Projektion des von dem materiellen Punkte im Raume wirklich beschriebenen unendlich kleinen Weges de, und die Geschwindigkeit der betrachteten Projektion wird nach dem in §. 3 Gesagten offenbar ausgedrückt durch $\frac{dx}{dt}$.

Die Geschwindigkeiten der Projektionen des beweglichen Punktes auf den drei Axen sind folglich:

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt},$$

und da man hat:

$$dx = de.\cos\alpha, \quad dy = de.\cos\beta, \quad dz = de.\cos\gamma,$$

so ist auch:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{de}{dt}.\cos\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{de}{dt}.\cos\beta, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{de}{dt}.\cos\gamma,$$

oder wenn man die Geschwindigkeiten der Projektionen mit u, v, w bezeichnet:

$$u = \omega\cos\alpha, \quad v = \omega\cos\beta, \quad w = \omega\cos\gamma.$$

Dieſe Projektionen der Geſchwindigkeit $\omega = \frac{ds}{dt}$ auf die drei Axen werden auch ihre **Komponenten** nach dieſen Axen genannt, und aus der Theorie der Projektionen folgt, daß die Geſchwindigkeit ω die Diagonale des aus ihren drei Komponenten konſtruirten rechtwinkligen Parallelepipedums iſt. Man hat folglich:

$$\omega = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2},$$

oder:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Wir wollen nun annehmen, daß, während ſich der materielle Punkt mit einer Geſchwindigkeit ω, deren Richtung mit den drei Koordinatenaxen reſp. die Winkel α, β, γ bildet, fortbewegt, dieſe Axen ſelbſt bei unveränderter Richtung, alſo auch der Anfangspunkt ſich mit einer Geſchwindigkeit U fortbewegen, deren Richtung mit dieſen Axen reſp. die Winkel a, b, c bildet; ſo beſteht z. B. die Geſammtbewegung des materiellen Punktes in dem Sinne der x offenbar aus ſeiner Bewegung in dieſem Sinne in Beziehung auf den beweglichen Anfangspunkt und aus der Bewegung dieſes Anfangspunktes ſelbſt in demſelben Sinne und in Beziehung auf die feſten Axen. Daſſelbe gilt für die Richtung der y und die der z, ſo daß die Komponenten der wirklichen Geſchwindigkeit des beweglichen Punktes im Raume nach den drei Axen reſp. ausgedrückt werden durch:

$$U\cos a + \omega\cos\alpha, \quad U\cos b + \omega\cos\beta, \quad U\cos c + \cos\gamma.$$

Nun ſeien MA und MB (Fig. 2) die Wege, welche der materielle Punkt M in der Sekunde beſchreiben würde, wenn derſelbe während dieſer Zeit die eine, oder die andere der beiden Geſchwindigkeiten U und ω beibehielte. Wir wollen AB′ gleich und parallel zu MB und dann MB′ ziehen, ſo iſt:

$$U\cos a + \omega\cos\alpha$$

der Ausdruck der Projektion der gebrochenen Linie MAB′ auf die Axe der x (§. 3) und nach der Theorie der Projektionen auch der Ausdruck der Projektion von MB′ auf dieſelbe Axe. Ebenſo ſind:

$$U\cos b + \omega\cos\beta \quad \text{und} \quad U\cos c + \omega\cos\gamma$$

die Ausdrücke der Projektionen von MB′ auf die Axen der y und der z. Dieſe gerade Linie MB′ würde alſo der bewegliche Punkt

in der Sekunde durchlaufen, wenn er während dieser Zeit die gleichzeitigen Geschwindigkeiten U und ω hätte; d. h. wenn MA und MB diese gleichzeitigen Geschwindigkeiten ausdrücken, so drückt MB' die sich daraus ergebende wirkliche Geschwindigkeit, oder die Resultante der Geschwindigkeiten U und ω, welche die Komponenten derselben genannt werden, aus.

Um diese Resultante zu erhalten, muß man also die beiden Komponenten U und ω wie die sie darstellenden Linien MA und AB' aneinander setzen, und die Endpunkte der dadurch entstehenden gebrochenen Linie durch eine gerade Linie verbinden. Diese Resultante kann auch als die Diagonale des aus den Komponenten U und ω oder MA und MB konstruirten Parallelogrammes betrachtet werden.

Wenn der bewegliche Punkt drei gleichzeitige Geschwindigkeiten hätte, so ließe sich auf dieselbe Weise zeigen, daß die daraus resultirende Geschwindigkeit erhalten werden kann, wenn man die einzelnen Geschwindigkeiten MA, MB, MC bei unveränderten Richtungen so aneinander legt, daß sie eine gebrochene Linie MAB'C' bilden, und dann die Endpunkte dieser gebrochenen Linie durch eine gerade Linie MC' verbindet. Diese Resultante MC' kann auch als die Diagonale des Parallelepipedums betrachtet werden, dessen Kanten die drei Geschwindigkeitskomponenten MA, MB, MC sind. Das von drei gleichzeitigen Geschwindigkeiten Gesagte gilt auch von einer beliebigen Anzahl solcher Geschwindigkeiten und die Resultante wird immer durch die gerade Linie ausgedrückt, welche die Endpunkte der gebrochenen Linie verbindet, die aus der Zusammensetzung der die Componenten darstellenden geraden Linien hervorgeht.

Zusammensetzung der Kräfte.

§. 14. Diese Relation zwischen den einzelnen gleichzeitigen Geschwindigkeiten und der wirklichen Geschwindigkeit, oder zwischen den Geschwindigkeitskomponenten und ihrer Resultante findet auch, wie wir sogleich zeigen werden, zwischen den Kräften statt.

Wenn man die Krafteinheit durch eine gewisse Längeneinheit ausdrückt, so kann jede Kraft durch eine Länge dargestellt werden, welche die Längeneinheit ebenso vielmal enthält, als die Kraft Krafteinheiten oder Kilogramme, und wenn man diese Länge auf die Richtung der Kraft von ihrem Angriffspunkte aus trägt; so wird diese Kraft durch diese Länge sowohl der Intensität oder Stärke, als der Richtung nach dargestellt.

Wenn nun auf denselben materiellen Punkt, welchen wir zuvörderst als unbewegt oder ruhend betrachten wollen, gleichzeitig mehrere Kräfte wirken, so sieht man leicht ein, daß sich dieser Punkt unter der gleichzeitigen Wirkung dieser Kräfte doch immer nur nach einer einzigen Richtung bewegen kann, wie

wenn nur eine einzige Kraft nach dieſer Richtung auf ihn wirkte, und folglich kann das Syſtem der gleichzeitig wirkenden Kräfte immer durch eine einzige Kraft erſetzt werden, welche man die Reſultante der gleichzeitig wirkenden Kräfte nennt, während dieſe die Komponenten der Reſultante genannt werden. Wir wollen nun die Relationen aufſuchen, welche ſowohl in Beziehung auf die Intenſität oder Stärke, als in Beziehung auf die Richtung zwiſchen den Komponenten und ihrer Reſultante ſtatt finden.

§. 15. Zuerſt wollen wir den ſehr einfachen Fall betrachten, wo zwei gleiche Kräfte P und P′, welche der Größe und Richtung nach durch die Längen mP, mP′ (Fig. 3) dargeſtellt werden, auf denſelben materiellen Punkt m wirken, indem ihre Richtungen einen Winkel α mit einander bilden, welcher ein Drittel von vier rechten Winkeln beträgt.

Wenn man nun annimmt, daß auf denſelben materiellen Punkt m noch eine dritte Kraft mP″ wirkt, welche der Intenſität nach, jeder der beiden erſten gleich iſt, und deren Richtung mit den Richtungen dieſer beiden erſten Kräfte einen Winkel α bildet; ſo iſt wegen der Symmetrie der Figur einleuchtend, daß ſich der materielle Punkt m nicht bewegen kann, und daß folglich die beiden Kräfte P und P′ die Wirkung der Kraft P″ aufheben. Aber die Wirkung der Kraft P″ würde offenbar auch durch eine Kraft P‴ aufgehoben, welche ihr gleich und entgegengeſetzt iſt, woraus folgt, daß die beiden Kräfte P und P′ durch die eine Kraft P‴ vertreten werden können, welche mithin ihre Reſultante iſt.

Da dieſe Kraft P‴ nach der Verlängerung von P″ gerichtet iſt, ſo theilt ihre Richtung den Winkel α in zwei gleiche Theile, wovon jeder $\frac{2}{3}$ eines rechten beträgt, und da die geraden Linien mP, mP′, mP″ gleich lang ſind; ſo ſind die Dreiecke PmP‴, P′mP‴ gleichſeitig, und bilden vereinigt eine Raute PmP′P‴. Die Reſultante mP‴ der beiden Kräfte mP und mP′ kann folglich erhalten werden, wenn man dieſe letztern nach ihren eigenen Richtungen zu der gebrochenen Linie mP′P‴ zuſammenſetzt und die Endpunkte derſelben durch eine gerade Linie mP‴ verbindet. Dieſe Reſultante kann auch als die Diagonale des aus den Komponenten mP, mP′ konſtruirten Parallelogramms betrachtet werden.

Wir wollen nun zeigen, daß dieſe Relation allgemeine Gültigkeit hat, d. h.: daß die Reſultante zweier beliebiger nach verſchiedenen Richtungen gleichzeitig auf denſelben materiellen Punkt wirkender Kräfte der Größe und Richtung nach durch die Diagonale des Parallelogramms ausgedrückt wird, welches aus den die Komponenten darſtellenden geraden Linien konſtruirt iſt.

Wenn dieſer Satz für zwei gleiche Kräfte P und P′, deren Richtungen einen beliebigen Winkel α mit einander bilden, bewie-

sen ist; so findet derselbe auch für zwei beliebige andere gleiche Kräfte Q und Q', deren Richtungen denselben Winkel α mit einander bilden, statt, d. h. die Resultanten dieser beiden Systeme gleicher Kräfte verhalten sich wie diese Kräfte. Die Richtung der Resultante fällt offenbar mit der Halbirungslinie des Winkels α zusammen, welchen die Richtungen der beiden Komponenten mit einander bilden, weil diese einander gleich sind und kein Grund vorhanden ist, warum sich die Resultante eher der einen, als der andern Komponente nähern sollte.

Nehmen wir nun zunächst an, daß die Kräfte P und Q ein gemeinschaftliches Maß F haben, welches in der ersten p mal und in der zweiten q mal enthalten ist, und setzen für jede der Kräfte P, P' des ersten Systemes p Kräfte, wovon jede $= F$ ist und dieselbe Richtung hat als P und P'; so setzen sich die Kräfte F paarweise in eine einzige r zusammen, welche nach der Halbirungslinie des Winkels α gerichtet ist, und die Gesammtresultante dieser einzelnen Resultanten, welche offenbar r so vielmal enthält, als p Einheiten hat, ist die Resultante der Kräfte P, P'. Ebenso ergibt sich, daß die Resultante der Kräfte Q, Q' die Partialresultante r so vielmal enthält, als q Einheiten hat, woraus folgt, daß sich die Resultanten der beiden Systeme P, P' und Q, Q' wie p zu q, und folglich wie P zu Q verhalten, welcher Satz sich auch leicht auf den Fall der Inkommensurabilität der Kräfte P und Q erweitern läßt.

Man kann nun leicht zeigen, daß, wenn dieser Satz für zwei gleiche Kräfte P und P' (Fig. 4), deren Richtungen einen Winkel α miteinander bilden, stattfindet, derselbe auch für zwei gleiche Kräfte P, P'' gilt, deren Richtungen einen halb so großen Winkel miteinander bilden. Was zunächst die Richtung der Resultante der Kräfte P und P'' anlangt, so fällt sie offenbar mit der Halbirungslinie mQ des Winkels PmP'' zusammen. Ferner wollen wir annehmen, daß nach mP'' zwei gleiche Kräfte, jede $=$ P'', wirken, so wird ihre Resultante durch $2m$P'' ausgedrückt, und die Resultante der beiden Kräfte P, P' wird durch $2m$A ausgedrückt; folglich wird die Resultante dieser vier Kräfte durch $2m$P'' $+ 2m$A ausgedrückt. Wenn man aber aus dem Punkte B, wo PP'' die Richtung mQ trifft, ein Perpendikel BA' auf mP'' fällt, so hat man mA $+ m$P'' $= 2m$A', und folglich wird die eben erwähnte Totalresultante ausgedrückt durch $4m$A'. Diese Resultante kann aber auch erhalten werden, wenn man successive die Resultante Q von P, P'', dann die Resultante Q' von P', P'' und endlich die Resultante von Q und Q' sucht. Nun bilden aber die Kräfte Q und Q' denselben Winkel miteinander, wie P und P'' oder wie P' und P'', und wenn folglich mB' die Hälfte der Resultante von P, P'' und mB'' den vierten Theil der Resultanten von Q, Q' darstellt; so hat man nach dem eben Bewiesenen:

$$\frac{2mB'}{mP} = \frac{4mB''}{2mB'} \text{ oder } \frac{mB'}{mP} = \frac{mB''}{mB'},$$

woraus folgt, das die Dreiecke $B'mP$, $B''mB'$, welche einen gleichen Winkel bei m haben, einander ähnlich sind. Aber die Linie mB'', welche den vierten Theil der Totalresultante ausdrückt, muß der Linie mA', welche dieselbe Größe ausdrückt, gleich sein, und folglich muß der Punkt B' mit dem Punkte B zusammenfallen, so daß man alsdann statt der Dreiecke $B'mP$, $B''mB'$ die rechtwinkligen Dreiecke BmP, $A'mP$ hat. Die Resultante der Kräfte P, P'' muß folglich durch das Doppelte von mB, d. h. durch die Diagonale des aus mP und mP'' construirten Parallelogrammes dargestellt werden.

Ebenso ergibt sich, daß der in Rede stehende Satz auch für zwei gleiche Kräfte gilt, welche einen der Winkel $\frac{\alpha}{4}$, $\frac{\alpha}{8}$, $\cdots$ $\frac{\alpha}{2^n}$ mit einander bilden, wo der letzte beliebig klein gemacht werden kann.

Wir wollen nun beweisen, daß der in Rede stehende Satz, wenn derselbe für die Winkel α, β und $\alpha+\beta$ statt findet, auch für den Winkel $\alpha+2\beta$ gilt, und zu dem Zwecke das System der auf den materiellen Punkt m wirkenden vier gleichen Kräfte P, P', P_1, P'_1 (Fig. 4ª) betrachten. Es sei $P'mP'_1 = \alpha$, $PmP' = P_1mP_1' = \beta$ und mQ, mQ_1 seien die Halbirungslinien der Winkel PmP', $P_1mP'_1$; so ist $QmQ_1 = \alpha+\beta$ und $PmP_1 = \alpha+2\beta$. Ferner wollen wir die Linie PP', welche in B auf mB senkrecht ist, so wie die Linie $P'P'_1$ ziehen, auf letztere das Perpendikel mP''' und aus den Punkten P, B auf m P''' die Perpendikel PA, BA' fällen; so ist $2mP'''$ die Resultante der beiden gleichen Kräfte P', P'_1, welche den Winkel α mit einander bilden, und $2mB$ ist die Resultante der beiden gleichen Kräfte P, P', oder P_1, P'_1 welche den Winkel β mit einander bilden. Wir wollen diese beiden letzten Resultanten resp. mit Q und Q_1 bezeichnen, so ist $4mA'$ die Resultante aus Q und Q_1, welche den Winkel $\alpha+\beta$ miteinander bilden. Da aber diese letztere Resultante die Gesammtresultante sein muß, so ist sie der Resultante aus P', P'_1 und der aus P, P_1 zusammengenommen gleich, woraus folgt, daß die Resultante der Kräfte P, P_1, welche den Winkel $\alpha+2\beta$ mit einander bilden, gleich $4mA' - 2mP'''$, d. h. $= mA$ ist, weil die Summe $mA + mP''' = 2mA'$ ist.

Da hiernach der in Rede stehende Satz für die Winkel 0, $\frac{\alpha}{2^n}$, $\frac{2\alpha}{2^n}$ wahr ist, so ist er es auch für die Winkel $\frac{3\alpha}{2^n}$, $\frac{4\alpha}{2^n}$, $\frac{5\alpha}{2^n}$, $\cdots$ $\frac{m\alpha}{2^n}$, d. h. für jeden beliebigen Winkel, weil $\frac{m\alpha}{2^n}$ offenbar jeden beliebigen Winkel ausdrücken kann.

Wir können nun zeigen, daß der fragliche Satz auch für zwei beliebige ungleiche Kräfte P, P′ (Fig. 5), welche einen rechten Winkel mit einander bilden, statt findet. Zu dem Zwecke wollen wir die beiden Diagonalen des aus den Kräften mP, mP′ konstruirten Rechteckes ziehen, und aus der Mitte B auf mP, mP′ resp. die Perpendikel BA, BA′ fällen, durch den Punkt m eine Parallele zu PP′ ziehen, und auf derselben $mB' = mB'' = mB$ nehmen; so sieht man leicht ein, daß mP die Diagonale der unvollendeten Raute mBPB″ ist, und daß folglich die durch mP ausgedrückte Kraft als die Resultante der beiden durch mB und mB″ dargestellten gleichen Kräfte betrachtet werden kann. Ebenso kann die Kraft mP′ als die Resultante aus mB und mB′ betrachtet werden. Die beiden Kräfte mP, mP′ können folglich durch vier Kräfte ersetzt werden, nämlich 1) durch die beiden Kräfte mB′, mB″ welche einander gleich und entgegengesetzt sind, folglich einander aufheben, und 2) durch zwei Kräfte, wovon jede durch mB ausgedrückt wird, und mithin einer einzigen Kraft gleich sind, welche durch mQ, d. h. durch die Diagonale des aus mP und mP′ konstruirten Rechteckes dargestellt wird.

Endlich läßt sich leicht zeigen, daß der in Rede stehende Satz auch für zwei ungleiche Kräfte gilt, welche einen beliebigen Winkel mit einander bilden. Denn es seien mP, mP′ (Fig. 6) die geraden Linien, welche diese beiden Kräfte ausdrücken; man konstruire das Parallelogramm mPQP′, ziehe BmB′ senkrecht auf die Diagonale mQ, fülle aus den Punkten P, P′ auf mQ die Perpendikel PA, P′A′ und ziehe zu dieser Diagonale die Parallelen PB, P′B′; so kann man nach dem vorhin Bewiesenen mP als die Resultante aus mA und mB, und ebenso mP′ als die Resultante aus mA′ und mB′ betrachten. Da aber die Kräfte mB und mB′ einander gleich und entgegengesetzt sind, also einander aufheben; so können sie unberücksichtigt bleiben, und es bleiben nur noch die beiden Kräfte mA, mA′ übrig, deren Resultante ihrer Summe gleich ist, d. h. durch die Diagonale mQ des aus mP und mP′ konstruirten Parallelogrammes ausgedrückt wird, weil $mA' = AQ$ ist.

Wenn also auf denselben materiellen Punkt zwei beliebige Kräfte wirken, welche der Größe und Richtung nach durch gerade Linien ausgedrückt werden; so wird die Resultante dieser Kräfte immer der Größe und Richtung nach durch die Diagonale des aus diesen Linien konstruirten Parallelogramms dargestellt. Mit andern Worten: man erhält diese Resultante, wenn man die beiden geraden Linien in den Richtungen der durch sie dargestellten Kräfte aneinander legt, und die Endpunkte der dadurch entstehenden gebrochenen Linie durch eine dritte gerade Linie verbindet.

Wenn man eine größere Anzahl auf denselben materiellen Punkt wirkender Kräfte in eine einzige zusammen zu setzen hätte, so könnte man zuerst nach der vorhergehenden Regel zwei dieser Kräfte zu einer Resultante, dann diese Resultante mit einer dritten

der gegebenen Kräfte, u. s. f. zusammensetzen, was offenbar darauf hinausläuft, die diese Kräfte darstellenden geraden Linien nach den entsprechenden Richtungen mit ihren Endpunkten aneinander zu legen, und dann die Endpunkte der auf diese Weise erhaltenen gebrochenen Linie durch eine gerade Linie zu verbinden, welche alsdann die gesuchte Resultante der Größe und Richtung darstellt.

§. 16. Aus dieser Regel und der bekannten Theorie der Projektionen folgt, daß die Projektion der Resultante aus einer beliebigen Anzahl von Kräften auf eine beliebige Axe der Summe der Projektionen ihrer Komponenten auf dieselbe Axe gleich ist, indem man die Projektionen der Kräfte als negativ betrachtet, welche mit der Richtung der Projektion der Resultante, die man als die der positiven Projektionen betrachtet, einen stumpfen Winkel bilden.

Aus der Zusammensetzung der Kräfte ergibt sich auch als besonderer Fall, daß man für jede Kraft drei andere nach aufeinander senkrechten Axen gerichtete Kräfte, welche den Projektionen der ursprünglichen Kraft auf diese drei Axen gleich sind, substituiren kann, was in der Mechanik sehr häufig geschieht.

Sehr oft hat man auch eine gegebene Kraft in drei andere zu zerlegen, wovon die eine nach einer gegebenen geraden Linie wirkt. Diese Zerlegung kann auf unendlich viele verschiedene Arten geschehen, wenn die Winkel, welche die Komponenten mit einander bilden, willkürlich bleiben; aber es findet nur eine einzige Zerlegungsart statt, wenn die drei Komponenten aufeinander senkrecht sein müssen. Man versteht daher in der Mechanik unter der Zerlegung oder Komponente einer Kraft Q nach einer geraden Linie *m*P gewöhnlich die Kraft, welche mit zwei andern unter sich und auf den ersten senkrechten Kräften zusammengesetzt, die Kraft Q zur Resultante gibt, und diese Komponente ist nichts anders, als die Projektion der die Kraft Q darstellenden geraden Linie auf die gerade Linie *m*P.

Oft zerlegt man eine gegebene Kraft auch in zwei andere, wovon die eine nach einer geraden Linie *m*P gerichtet und die andere darauf senkrecht ist, und es wird in diesem Falle angenommen, daß die gegebene Kraft und ihre beiden Komponenten in derselben Ebene liegen. Endlich haben wir bei der Ableitung der Sätze über die Zusammensetzung der Kräfte angenommen, daß sich der materielle Punkt, auf welchen diese Kräfte wirken, in Ruhe befindet; allein die bewiesenen Sätze würden auch noch statt finden, wenn sich dieser materielle Punkt in Bewegung befände; denn es ist eine Erfahrungswahrheit, daß die Kräfte auf einen in Bewegung befindlichen Körper eben so wirken, wie auf einen ruhenden, und folglich sind die Gesetze der Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte in beiden Fällen dieselben.

Gleichungen für die krummlinige Bewegung.

§. 17. Wenn sich ein materieller Punkt bewegt, und seine Geschwindigkeit ändert sich der Größe, aber nicht der Richtung nach; so haben wir gesehen, daß diese Veränderung wegen der Trägheit der Materie nicht ohne die Einwirkung einer nach der Richtung der Bewegung des materiellen Punktes thätigen Kraft statt finden kann, und wenn die Geschwindigkeit ihre Richtung ändert, gleichviel ob sich ihre Größe auch ändert, oder nicht; so kann man ebenso behaupten, daß diese Veränderung von einer Kraft herrührt, welche nach einer von der Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit des materiellen Punktes verschiedenen Richtung wirkt.

Um die Relation zu finden, welche zwischen dieser Kraft und der von ihr hervorgebrachten nothwendig krummlinigen Bewegung statt findet, werden wir uns wieder auf den Erfahrungssatz berufen: daß die Wirkung einer Kraft auf einen sich mit einer gewissen Geschwindigkeit bewegenden Körper dieselbe ist, als wenn sich dieser Körper in Ruhe befindet, d. h. für einen Beobachter, welcher sich mit der Geschwindigkeit des Körpers in dem Augenblicke, wo die Kraft auf denselben wirken soll, in demselben Sinne, wie dieser Körper bewegt, würde letzterer in Folge der Wirkung dieser Kraft sich so zu bewegen scheinen, als wenn er von der Ruhe ausginge.

Wir wollen nun annehmen, daß die rechtwinkligen Koordinatenaren dieselben Richtungen behalten, aber daß sich der Anfangspunkt derselben mit einer Geschwindigkeit bewegt, welche der des Körpers in dem Augenblicke, wo die Kraft auf ihn wirken soll, gleich und parallel ist, und α, β, γ seien die Winkel, welche die Richtung der Kraft **F** mit diesen Aren bildet. Diese Kraft kann während des unendlich kleinen Zeittheilchens dt als konstant betrachtet werden, und dasselbe gilt von ihren Komponenten:

$$\mathbf{F}\cos\alpha,\quad \mathbf{F}\cos\beta,\quad \mathbf{F}\cos\gamma.$$

Die Komponenten der scheinbaren oder relativen Geschwindigkeit, welche dem materiellen Punkte während des Zeitelementes dt mitgetheilt wird, werden folglich ausgedrückt durch (§. 10):

$$g\,\frac{\mathbf{F}\cos\alpha}{p}\,dt,\; g\,\frac{\mathbf{F}\cos\beta}{p}\,dt,\; g\,\frac{\mathbf{F}\cos\gamma}{p}\,dt.$$

Aber die Geschwindigkeit, welche die Kraft **F** dem materiellen Punkte mittheilen würde, wenn sich derselbe in Ruhe befände, coexistirt nach dem erwähnten Erfahrungssatze mit der bereits erlangten Geschwindigkeit des materiellen Punktes, so daß sich ihre Komponenten zusammenaddiren (§. 13), und da die zuletzt ausgedrückten Komponenten sich auf die unendlich kleine Zeit dt be-

ziehen; so sind sie die Differenziale der andern Komponenten in Beziehung auf die Zeit t. Wenn folglich u, v, w die nach den Koordinatenaxen gerichteten Komponenten der Geschwindigkeit des materiellen Punktes in dem Augenblicke, wo die Kraft F auf ihn wirken will, bezeichnen; so hat man:

$$(A) \quad du = g.\frac{F\cos\alpha}{p}dt, \quad dv = g.\frac{F\cos\beta}{p}dt, \quad dw = g.\frac{F\cos\gamma}{p}dt,$$

oder:

$$\frac{du}{dt} = g\frac{F\cos\alpha}{p}, \quad \frac{dv}{dt} = g\frac{F\cos\beta}{p}, \quad \frac{dw}{dt} = g\frac{F\cos\gamma}{p}.$$

Wenn man diese Gleichungen mit der in §. 10 vergleicht, so folgt, daß die Projektion der Beschleunigung der Geschwindigkeit nach der Richtung jeder Axe während der unendlich kleinen Zeit dt als diejenige betrachtet werden kann, welche der materielle Punkt der sich nach dieser Axe bereits mit der Komponente seiner Geschwindigkeit im Raume fortbewegt, annehmen würde, wenn die Komponente der Kraft F nach dieser Axe nun auf ihn wirkte.

In den Gleichungen (A) sind alle Gesetze der Bewegung eines materiellen Punktes enthalten, auf welchen eine Kraft wirkt, die eine von der Richtung der bereits erlangten Geschwindigkeit des materiellen Punktes verschiedene Richtung hat, d. h. alle Gesetze der krummlinigen Bewegung eines materiellen Punktes.

Bewegung schwerer Körper im leeren Raume.

§. 18. Wir wollen diese Gleichungen auf die Bestimmung der Bewegung schwerer Körper im leeren Raume unter der alleinigen Wirkung der Schwere anwenden. Wenn wir die Axe der z vertikal annehmen, und die z von unten nach oben zählen, so verwandeln sich die Gleichungen (A) wegen $F = p$ in folgende:

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dv}{dt} = 0, \quad \frac{dw}{dt} = -g.$$

Hieraus ergibt sich durch Integration, wenn u_0, v_0, w_0 die Komponenten der anfänglichen Geschwindigkeit bezeichnen:

$$u = u_0, \quad v = v_0, \quad w = w_0 - gt,$$

oder:

$$\frac{dx}{dt} = u_0, \quad \frac{dy}{dt} = v_0, \quad \frac{dz}{dt} = w_0 - gt.$$

Wenn man die anfängliche Lage des materiellen Punktes, welche $t = 0$ oder dem Augenblicke entspricht, von welchem aus die Zeit t gezählt wird, zum Anfangspunkte der festen Koordinaten x, y, z nimmt, so ergibt sich durch eine neue Integration:

$$x = u_0 t, \quad y = v_0 t, \quad z = w_0 t - g\frac{t^2}{2}.$$

und wenn man t zwischen diesen drei Gleichungen eliminirt; so erhält man:

$$y = \frac{v_0}{u_0} x; \quad z = \frac{w_0}{u_0} x - \frac{g}{2u_0^2} x^2.$$

Die erste dieser letzten Gleichungen ist die einer Vertikal-Ebene, worin die Bewegung statt findet, und wenn man diese ebene zu der Ebene der xz nimmt, oder $v_0 = 0$ setzt; so ist die zweite Gleichung die der Curve, welche der materielle Punkt in dieser Ebene beschreibt, im Allgemeinen die Trajektorie desselben genannt wird und in dem gegenwärtigen Falle offenbar eine Parabel ist, deren Axe vertikal steht.

Das Maximum von z ist $= \frac{w_0^2}{2g}$ und entspricht $x = \frac{u_0 w_0}{g}$, welches genau die Koordinaten des Scheitels der Parabel sind, und man sieht, daß die größte Höhe, bis zu welcher der materielle Punkt aufsteigt, genau diejenige ist, welche er erreichen würde, wenn er mit der anfänglichen Geschwindigkeit w_0 aufwärts geworfen würde. Die Trajektorie geht durch den Anfangspunkt der Koordinaten und durchschneidet die Axe der x in einem zweiten Punkte, dessen Abscisse $= \frac{2u_0 w_0}{g}$, d. h. das Doppelte der Abscisse des Scheitels der Curve ist, und die Wurfweite genannt wird.

Wenn α der Winkel, welchen die anfängliche Geschwindigkeit des materiellen Punktes mit der Axe der x bildet, und V_0 diese Geschwindigkeit selbst bezeichnet; so hat man:

$$u_0 = V_0 \cos\alpha \text{ und } w_0 = V_0 \sin\alpha,$$

woraus folgt, daß die Wurfweite ausgedrückt wird durch:

$$\frac{2V_0 \sin\alpha \cos\alpha}{g} \text{ oder } \frac{V_0 \sin 2\alpha}{g}$$

und die größte Wurfweite bei unveränderter anfänglicher Geschwindigkeit V_0 entspricht folglich $2\alpha = 90°$ oder $\alpha = 45°$.

Ausdruck der Tangential- und Normalkomponenten der bewegenden Kraft.

§. 19. Wenn man die Kraft F, welche die Bewegung des Körpers verändert in einem beliebigen Augenblicke der Bewegung in zwei andere zerlegt, wovon die eine nach der Richtung der Geschwindigkeit, d. h. nach der Tangente an der Trajektorie und die andere nach einer darauf senkrechten in der Normalebene dieser Kurve liegenden Richtung wirkt; so erhält man zwei Komponenten, welche zu den Elementen der Bewegung des Körpers, d. h. zu seinem Gewichte und zu den Größen, welche die Größe und Richtung seiner Geschwindigkeit ausdrücken, in sehr einfachen Beziehungen stehen.

Um diese Relationen zu erhalten, wollen wir die Gleichungen (A) in §. 17 mit $\frac{p}{g}$ multipliciren, damit sie nicht mehr Gleichheiten zwischen Längen, welche Geschwindigkeitszunahmen messen, ausdrücken, sondern Gleichheiten zwischen Kräften, welche in Kilogrammen ausgedrückt sind. Hierdurch ergibt sich:

$$\frac{p}{g}\frac{du}{dt} = F\cos\alpha,\quad \frac{p}{g}\frac{dv}{dt} = F\cos\beta,\quad \frac{p}{g}\frac{dw}{dt} = F\cos\gamma.$$

Wenn ω die Geschwindigkeit des materiellen Punktes und ds den in dem Zeitelemente dt beschriebenen unendlich kleinen Kurvenbogen bezeichnet; so hat man:

$$\omega = \frac{ds}{dt},$$

und zu gleicher Zeit:

$$u = \frac{dx}{ds}\omega,\quad v = \frac{dy}{ds}\omega,\quad w = \frac{dz}{ds}\omega,$$

weil $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ die Kosinus der Winkel sind, welche die Richtung des Elementes ds oder die der Geschwindigkeit ω mit den Koordinatenaxen bildet. Substituirt man diese Werthe in die obigen Gleichungen und entwickelt die Ausdrücke von du, dv, dw nach den Regeln der Differenzialrechnung, so findet man:

$$\frac{p}{g}\frac{dx}{ds}\frac{d\omega}{dt} + \frac{p}{g}\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{dt}\omega = F\cos\alpha,$$

$$\frac{p}{g}\frac{dy}{ds}\frac{d\omega}{dt} + \frac{p}{g}\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{dt}\omega = F\cos\beta,$$

$$\frac{p}{g}\frac{dz}{ds}\frac{d\omega}{dt}+\frac{p}{g}\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{dt}\omega=F\cos\gamma,$$

oder wenn man dt vermöge der Relation $\omega=\frac{ds}{dt}$ aus den zweiten Gliedern der ersten Theile dieser letzten Gleichungen eliminirt:

$$\frac{p}{g}\frac{dx}{ds}\frac{d\omega}{dt}+\frac{p}{g}\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds}\omega^2=F\cos\alpha,$$

$$\frac{p}{g}\frac{dy}{ds}\frac{d\omega}{dt}+\frac{p}{g}\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds}\omega^2=F\cos\beta,$$

$$\frac{p}{g}\frac{dz}{ds}\frac{d\omega}{dt}+\frac{p}{g}\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds}\omega^2=F\cos\gamma.$$

Wenn a, b, c die Winkel bezeichnen, welche die Geschwindigkeit ω oder das Kurvenelement ds oder endlich die Tangente der Trajektorie mit den Koordinatenaxen bildet, so hat man:

$$\frac{dx}{ds}=\cos a,\quad \frac{dy}{ds}=\cos b,\quad \frac{dz}{ds}=\cos c.$$

Denkt man sich nun durch den Anfangspunkt der Koordinaten eine gerade Linie, welche sich so um diesen Punkt drehet, daß sie beständig zu der Geschwindigkeit des materiellen Punktes oder zu der Tangente der von demselben beschriebenen Kurve parallel ist; so sind die Koordinaten eines in der Entfernung r auf dieser geraden Linie vom Anfangspunkte liegenden Punktes resp.:

$$r\cos a,\quad r\cos b,\quad r\cos c,$$

und wenn man $r=1$ setzt, so sind diese Koordinaten offenbar:

$$\cos a,\ \cos b,\ \cos c,\quad \text{oder}\quad \frac{dx}{ds},\quad \frac{dy}{ds},\quad \frac{dz}{ds}.$$

Dieser geometrische Punkt beschreibt in der unendlich kleinen Zeit dt einen unendlich kleinen Bogen $d\psi$, welcher mit den beiden successiven Lagen der zu der Tangente parallelen geraden Linie eine Ebene bestimmt, die zu der Ebene parallel ist, worin die beiden successiven Tangenten der von dem beweglichen Punkte beschriebenen Kurve liegen, und welche die Oskulations- oder Krümmungsebene genannt wird, und außerdem kann der

Bogen $d\psi$ als auf den geraden Linien ſenkrecht betrachtet werden, welche durch den Anfangspunkt parallel zu den beiden aufeinander folgenden Tangenten gezogen ſind.

Da die Projektionen des Bogens $d\psi$ auf die Koordinatenaxen nichts anders ſind, als die unendlich kleinen Zuwächſe der Koordinaten $\cos.a$, $\cos.b$, $\cos.c$ des Punktes, welcher dieſen Bogen beſchreibt; ſo werden ſie offenbar ausgedrückt durch:

$$d.(\cos a),\quad d.(\cos b),\quad d.(\cos c),$$

oder:

$$d.\left(\frac{dx}{ds}\right),\quad d.\left(\frac{dy}{ds}\right),\quad d.\left(\frac{dz}{ds}\right).$$

Bezeichnen alſo l, m, n die Winkel, welche dieſer Bogen $d\psi$, d. h. die in der Krümmungsebene liegende Normale der Curve mit den Koordinatenaxen bildet, und man betrachtet dieſen Bogen als von der erſten Tangente gegen die zweite gerichtet*), ſo hat man:

$$d.\left(\frac{dx}{ds}\right)=\cos l.d\psi,\quad d.\left(\frac{dy}{ds}\right)=\cos m.d\psi,\quad d.\left(\frac{dz}{ds}\right)=\cos n.d\psi.$$

Subſtituirt man dieſe Werthe in die vorhergehenden Gleichungen, und ſetzt in den erſten Gliedern reſp. $\cos.a$, $\cos.b$, $\cos.c$ für die Verhältniſſe $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$; ſo kommt:

$$\frac{p}{g}\frac{d\omega}{dt}.\cos a+\frac{p\omega^2}{g}\frac{d\psi}{ds}\cos l=\mathrm{F}\cos\alpha,$$

$$\frac{p}{g}\frac{d\omega}{dt}.\cos b+\frac{p\omega^2}{g}\frac{d\psi}{ds}\cos m=\mathrm{F}\cos\beta,$$

$$\frac{p}{g}\frac{d\omega}{dt}.\cos c+\frac{p\omega^2}{g}\frac{d\psi}{ds}\cos n=\mathrm{F}\cos\gamma,$$

und wenn man ſich zwei Kräfte:

$$\mathrm{P}=\frac{p}{g}.\frac{d\omega}{dt}\quad\text{und}\quad\mathrm{Q}=\frac{p\omega^2}{g}\frac{d\psi}{ds}$$

denkt, ſo nehmen die letzten Gleichungen folgende Form an:

---

*) Wenn nämlich MT, TM′ (Fig. 7 und 8) die beiden ſucceſſiven Tangenten, Om, Om′ die durch den Anfangspunkt gehenden Parallelen zu denſelben, und mm' der Bogen $d\psi$ ſind: ſo muß dieſer Bogen immer von der erſten Tangente gegen die zweite oder von der erſten Parallele Om gegen die zweite Om′ d. h. von m gegen m' gezählt werden.

$$P\cos a + Q\cos l = F\cos\alpha,$$
$$P\cos b + Q\cos m = F\cos\beta,$$
$$P\cos c + Q\cos n = F\cos\gamma.$$

Aus dieſen Gleichungen folgt offenbar; daß die Kraft F, welche die Bewegung des Körpers oder des materiellen Punktes hervorbringt, als die Reſultante (§. 16) der beiden Kräfte P und Q betrachtet werden kann, wovon die eine mit den Koordinatenaxen die Winkel a, b, c bildet, alſo nach der Tangente der Trajektorie gerichtet iſt und in dem Sinne der Geſchwindigkeitszunahme $d\omega$ wirkt, während die andere Q die Winkel l, m, n mit den Koordinatenaxen bildet, und folglich nach dem weiter oben Geſagten nach der in der Krümmungsebene auf der konkaven Seite der Kurve gezogenen Normale der Trajektorie gerichtet iſt. Dieſe beiden Kräfte werden reſp. die Tangential- und Normalkomponenten der bewegenden Kraft genannt, und man kann ſich immer vorſtellen, daß die Bewegung des materiellen Punktes durch die gleichzeitige Wirkung dieſer beiden Kräfte hervorgebracht wird.

Die in dem Ausdrucke der Normalkomponente vorkommende Größe $\frac{d\psi}{ds}$ wird die Krümmung genannt, und es läßt ſich leicht zeigen, daß $\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{\rho}$ iſt, wenn ρ den Krümmungshalbmeſſer bezeichnet *). Man kann alſo ſagen: daß die Normalkomponente der bewegenden Kraft, wenn ſie während einer Sekunde bei unveränderter Richtung und Intenſität auf den materiellen Punkt wirkte, demſelben einen Geſchwindigkeitszuwachs ertheilen würde, welcher dem Produkte aus dem Quadrate der Geſchwindigkeit ω und aus der Krümmung $\frac{d\psi}{ds}$ oder den Quotienten aus dem Quadrate der Geſchwindigkeit ω und dem Krümmungshalbmeſſer gleich iſt.

Da das Gewicht p des Körpers oder materiellen Punktes in Kilogrammen ausgedrückt iſt, und ω, g, ρ Längen ausdrücken, welche auf dieſelbe Einheit, das Meter, bezogen werden, ſo drückt

---

*) Denn es ſeien $MM' = ds$, $mm' = d\psi$ (Fig. 9), MC, M'C zwei ſucceſſive Normalen und Om, Om' zwei durch den Anfangspunkt O zu den dieſen Normalen entſprechenden Tangenten gezogenen Parallelen, welche auf dieſen Normalen ſenkrecht ſind, und $MC = M'C$, ſo daß die beiden Bogen ds, $d\psi$ als zwei ähnliche Kreisbogen betrachtet werden können; ſo hat man $MM' : mm' = MC : Om$. Da aber $MC = \rho$ der Krümmungshalbmeſſer und $Om = 1$ iſt, ſo hat man;

$$ds : d\psi = \rho : 1, \quad \text{folglich} \quad \frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{\rho}.$$

$p\frac{\omega^2}{g\rho}$ offenbar der Werth den Normalkomponente der bewegenden Kraft in Kilogrammen aus.

Was die Tangentialkraft anlangt, so würde sie, wenn sie während einer Sekunde bei unveränderter Intensität und Richtung auf den materiellen Punkt wirkte, demselben einen Geschwindigkeitszuwachs $= \frac{d\omega}{dt}$ ertheilen, d. h. die Größe der Geschwindigkeit genau um ebensoviel verändern, wie wenn die Bewegung geradlinig wäre (§. 10).

§. 20. Man kann die Ausdrücke der Tangential- und Normalkomponenten P, Q der bewegenden Kraft auch noch auf eine andere Weise erhalten. Denn nach §. 17 übt eine Kraft auf einen in Bewegung befindlichen Körper dieselbe Wirkung aus, wie auf denselben ruhenden Körper, und wenn sich ein Körper unter der Wirkung mehrerer Kräfte bewegt; so wirkt jede derselben unabhängig von den übrigen, und ertheilt dem Körper in ihrer eigenen Richtung dieselbe Geschwindigkeitszunahme, als wenn sie allein wirkte. Hieraus und aus der Regel für die Zusammensetzung der Kräfte (§. 14) ergibt sich leicht, daß, wenn zwei Kräfte P und Q während der sehr kleinen Zeit *dt* auf einen in Bewegung befindlichen materiellen Punkt wirken, so daß sie während dieser Zeit *dt* als konstant betrachtet werden können, jede dieser beiden Kräfte dem materiellen Punkte in ihrer eigenen Richtung eine Geschwindigkeitszunahme ertheilt, welche der Dauer *dt* ihrer Wirkung und ihrer Intensität proportional ist (§. 16), und die wirkliche Verrückung des materiellen Punktes am Ende der Zeit *dt* wird durch die dritte Seite eines Dreieckes ausgedrückt, dessen beide andern Seiten die Verrückungen oder Bewegungen ausdrücken, welche dieser materielle Punkt in der Richtung jeder der Kräfte P, Q erfahren haben würde, wenn sie während derselben Zeit einzeln auf denselben gewirkt hätten.

Da die Tangentialkraft P in dem Zeitintervalle *dt* ihre Richtung nur unendlich wenig ändert, so wirkt sie wie bei der geradlinigen Bewegung, und erzeugt demnach in ihrer Richtung einen Geschwindigkeitszuwachs $d\omega$, welcher der Relation genügt:

$$\frac{p}{g} \cdot \frac{d\omega}{dt} = P.$$

Da die Normalkomponente Q während der unendlich kleinen Zeit *dt* ihrer Richtung und Intensität nach ebenfalls als konstant betrachtet werden kann, und der materielle Punkt in dieser Richtung keine anfängliche Geschwindigkeit hat, weil sie auf der Trajektorie senkrecht ist; so wird die Bewegung *de* dieses Punktes in der Richtung der Kraft Q durch die Relation:

$$ds = g.\frac{Q}{p}\frac{dt^2}{2}$$

gegeben (§. 11). Da man aber für den Bogen ds seine Sehne nehmen kann, welche die mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser 2ρ des Krümmungskreises und dem Abschnitte de desselben ist; so hat man:

$$ds^2 = 2\rho.de,$$

und wenn man de zwischen diesen beiden Gleichungen eliminirt, so erhält man:

$$\frac{ds^2}{2\rho} = g\frac{Q}{p}\frac{dt^2}{2},$$

folglich:

$$Q = \frac{p}{g}\frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\rho} = \frac{p}{g}\frac{\omega^2}{\rho},$$

welches derselbe Werth ist, wie der vorhergehende.

Zuweilen gibt man dem Ausdrucke der Normalkomponente eine andere Form, indem man den Bogen $d\psi$, oder den von zwei aufeinander folgenden Tangenten gebildeten Winkel darin beibehält, und die Relationen:

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{\rho},\quad \omega = \frac{ds}{dt},\quad Q = \frac{p}{g}\frac{\omega^2}{\rho}$$

geben zu diesem Zwecke sofort:

$$Q = \frac{p}{g}.\omega\frac{d\psi}{dt}.$$

Wenn man sich wie im §. 19 durch einen festen Punkt eine gerade Linie gezogen denkt, welche sich um diesen Punkt so drehet, daß sie beständig zu der Richtung der Geschwindigkeit ω, d. h. zu der Tangente der von dem materiellen Punkte beschriebenen Kurve parallel ist, und man nimmt auf dieser geraden Linie einen Punkt, welcher von dem festen Punkte um die Längeneinheit entfernt ist; so beschreibt dieser Punkt in der Zeit dt einen kleinen Bogen $d\psi$ und seine Geschwindigkeit wird folglich durch $\frac{d\psi}{dt}$ ausgedrückt. Man kann diese Größe die Rotations- oder Winkelgeschwindigkeit der Tangente oder der Geschwindigkeit ω nennen, und vermittelst dieser Größe läßt sich die Normalkraft Q

leicht ausdrücken, weil, wenn diese Kraft bei unveränderter Richtung und Intensität während einer Sekunde auf den materiellen Punkt wirkte, sie demselben eine Geschwindigkeitszunahme ertheilen würde, welche dem Produkte aus der Geschwindigkeit v und der Winkelgeschwindigkeit derselben gleich wäre.

Während die aufeinander senkrechten Komponenten $\frac{p}{g}\frac{dv}{dt}$ und $\frac{p}{g}\frac{v^2}{\rho}$ resp die Tangial- und Normalkraft genannt werden, wird die Kraft F, welche ihre Resultante ist, und immer die Resultante aus allen auf den beweglichen materiellen Punkt wirkenden Kräfte sein muß, die Totalkraft genannt.

Bewegung eines materiellen Punktes nach einer gegebenen Kurve.

§. 21. Wir wollen uns hier bei den Anwendungen der vorhergehenden Formeln auf die Bestimmung der Bewegung eines Körpers oder materiellen Punktes, auf welchen eine gegebene Kraft wirkt, nicht aufhalten, weil diese Aufgabe in der technischen Mechanik, welche den speciellen Gegenstand des vorliegenden Werkes bildet, wenig Anwendung findet, und wir wollen uns daher blos mit der Aufgabe beschäftigen: die Bewegung eines sich nach einer gegebenen Kurve bewegenden materiellen Punktes, und namentlich den Druck, welchen derselbe gegen diese Kurve ausübt, zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke müssen wir zunächst einen Erfahrungssatz in Erinnerung bringen, welcher sich auf die gegenseitige Einwirkung zweier einander berührender Körper bezieht, und gewöhnlich dadurch kurz ausgedrückt wird, daß man sagt: die Wirkung sei der Gegenwirkung gleich und entgegengesetzt; aber darin besteht, daß, wenn einer von zwei einander berührenden Körpern nach einer gewissen Richtung auf den andern einen Druck oder eine Kraft F ausübt, dieser zweite Körper auf den ersten nach einer gerade entgegengesetzten Richtung denselben Druck oder dieselbe Kraft ausübt.

Dieser Satz bildet gewissermaßen die Grundlage der ganzen technischen Mechanik; denn derselbe kommt überall da zur Anwendung, wo man nicht blos die Bewegung eines einzelnen Körpers, sondern die zweier oder mehrerer mit einander in Berührung stehender Körper betrachtet. Dieser Grundsatz kann nicht blos direkt durch das Experiment als richtig dargethan werden, sondern derselbe wird auch indirekt dadurch bestätigt, daß die beobachteten Erscheinungen mit den Gesetzen übereinstimmen, welche aus den auf diesem Grundsatze beruhenden Theorien abgeleitet werden.

Wir wollen nun sehen, wie man mit Hülfe dieses Grundsatzes den Druck bestimmen kann, welchen ein sich längs einer Kurve bewegender materieller Punkt auf diese Kurve ausübt. Es bezeichne F die jeden Augenblick auf diesen materiellen Punkt

wirkende Kraft, so würde, da sie im Allgemeinen nicht nach der Richtung der Tangente der zu beschreibenden Kurve wirkt, wenn sie allein auf den materiellen Punkt wirkte, derselbe auch eine andere Bahn oder Trajektorie beschreiben. Allein der Druck, welchen die gegebene Kurve auf den materiellen Punkt ausübt, kann als eine zweite Kraft betrachtet werden, welche mit der ersten zusammengesetzt, eine Resultante R gibt, durch welche die Bewegung des materiellen Punktes hervorgebracht wird. Diese Kraft R muß folglich so beschaffen sein, daß ihre Normalkomponente durch:

$$\frac{p}{g} \cdot \frac{\omega^2}{\rho}$$

ausgedrückt wird, wo ω die Geschwindigkeit des materiellen Punktes auf der gegebenen Kurve und ρ den Krümmungshalbmesser dieser Kurve bezeichnet.

Betrachten wir zunächst den Fall, wo die gegebene Kurve eben ist und die Kraft F in der Ebene dieser Kurve wirkt; so nähert sich die Richtung, nach welcher der Widerstand der Kurve auf den materiellen Punkt wirkt, der Richtung der Normale dieser Kurve um so mehr, je geringer die Reibung ist, und wir wollen daher bei diesen theoretischen Betrachtungen annehmen, daß diese Reibung völlig Null, oder daß die Wirkung der Kurve auf den materiellen Punkt genau nach der Normale gerichtet sei. Wir wollen diese Kraft mit N bezeichnen, so liegt dieselbe, wie die Wirkung der Kurve auf den materiellen Punkt in der Ebene dieser Kurve, und die Wirkung des materiellen Punktes auf die Kurve, oder der auf diese Kurve ausgeübte Druck ist der Kraft N gleich und entgegengesetzt. Die Normalkomponente der Totalkraft R besteht aus der Kraft N und der Normalkomponente der Kraft F, so daß N die Differenz zwischen der Normalkomponente von $R = \frac{p}{g} \cdot \frac{\omega^2}{\rho}$ und der von F ist.

Wenn man statt der auf den materiellen Punkt wirkenden Kraft N die gleiche und entgegengesetzte Kraft, oder den auf die Kurve ausgeübten Druck betrachtet, und die der Normalkomponente von R, nämlich $\frac{p\omega^2}{g\rho}$, entgegengesetzte Kraft die Centrifugalkraft nennt; so ergibt sich, daß der Druck N die Summe aus der Normalkomponente von F und der Centrifugalkraft ist, wo diese Summe übrigens eine wirkliche Differenz werden kann, wenn die Normalkomponente der bewegenden Kraft F mit der Centrifugalkraft nach entgegengesetztem Sinne wirkt.

Wenn die gegebene Kurve von doppelter Krümmung ist und die Kraft F hat eine beliebige Richtung, so kann der Widerstand N seiner Natur nach nur nach einer in der Normalebene liegenden Richtung wirken. Wenn keine Reibung statt findet, so wirken auf den beweglichen Punkt nur die beiden Kräfte N, F

und die Reſultante derſelben iſt die weiter oben mit R bezeichnete Kraft. Die Normalkomponente dieſer letzten Kraft wird wieder durch $\frac{p\omega^2}{g\rho}$ ausgedrückt, wo ρ den Krümmungshalbmeſſer der gegebenen Kurve bezeichnet, und nach der Theorie der Zuſammenſetzung der Kräfte muß die in der Normalebene liegende Komponente $\frac{p\omega^2}{g\rho}$ von R die Reſultante aus der Kraft N und der in dieſer Ebene liegenden Komponente von F ſein. Nimmt man nun, wie vorhin, ſtatt der Komponente von R die nach entgegengeſetzter Richtung wirkende gleiche Kraft, d. h. die Centrifugalkraft, und ſtatt der Kraft N die gleiche und entgegengeſetzte Kraft oder den auf die Kurve ausgeübten Druck; ſo ergibt ſich, daß dieſer Druck die Reſultante aus der Normalkomponente von F und der Centrifugalkraft iſt.

Wenn Reibung ſtatt findet, ſo hat der Druck N, wie man ſpäter ſehen wird, auch eine Tangentialkomponente, welche alsdann ein beſtimmter Theil der Reſultante aus den beiden andern Komponenten iſt, ſo daß man, wenn man ſie mit der Tangentialkomponente von F verbindet, wie vorhin, die Tangentialkomponente von R, und folglich das Geſetz der Bewegung des materiellen Punktes auf der Kurve erhält.

§. 22. Bei den Anwendungen auf Maſchinen hat man faſt nur die Bewegung eines materiellen Punktes im Kreiſe zu betrachten, und wir wollen uns daher einen Körper denken, welcher ſich um eine feſte Axe drehet, womit derſelbe durch eine vollkommen ſtarre Stange, oder durch irgend einen andern ſtarren Körper verbunden iſt, und die Kraft zu beſtimmen ſuchen, welche während der Bewegung auf dieſe Stange wirkt.

Um die Begriffe beſſer zu fixiren, wollen wir annehmen, daß die Axe, um welche ſich der Körper drehet, horizontal ſei, und folglich der beſchriebene Kreis in einer Vertikalebene liegt. Es bezeichne ρ den Halbmeſſer dieſes Kreiſes, ſo iſt die Kraft, welcher die Stange widerſtehen muß, nichts anders, als der vorhin erwähnte auf die Kurve ausgeübte Druck, und folglich die Reſultante aus der Centrifugalkraft $\frac{p\omega^2}{g\rho}$ und aus der Normalkomponente des Gewichtes p des Körpers. Wenn alſo α den ſpitzen Winkel bezeichnet, welchen das Element des beſchriebenen Kreiſes mit der Vertikale bildet; ſo wird der Druck in dem untern Halbkreiſe durch:

$$\frac{p}{g} \cdot \frac{\omega^2}{\rho} + p \sin\alpha, \text{ oder } p\left(\frac{\omega^2}{g\rho} + \sin\alpha\right),$$

und der in dem obern Halbkreiſe durch:

$$\frac{p}{g} \cdot \frac{\omega^2}{\rho} - p \sin \alpha, \text{ oder } p\left(\frac{\omega^2}{g\rho} - \sin \alpha\right)$$

ausgedrückt. Wenn der Körper oder materielle Punkt den tiefsten, oder höchsten Punkt des Kreises erreicht, so wird $\sin \alpha = 1$ und die vorhergehenden Ausdrücke verwandeln sich alsdann in folgende:

$$p\left(\frac{\omega^2}{g\rho} + 1\right) \text{ und } p\left(\frac{\omega^2}{g\rho} - 1\right),$$

und wenn der letzte Ausdruck negativ ist, so wirkt auf die Stange statt einer Zugkraft in dem Sinne der Centrifugalkraft nach entgegengesetztem Sinne eine Druckkraft, wodurch dieselbe gegen die Axe gedrückt wird. Diese Druckkräfte werden, wie das Gewicht p des Körpers in Kilogrammen ausgedrückt.

Wenn der Körper während seines Herabsteigens von der mittlern Höhe bis zu dem tiefsten Punkte des Kreises, d. h. von der Höhe ρ, die Geschwindigkeit ω erlangt, und man will die Spannung der Stange, welche denselben mit der Drehungsaxe verbindet, in dem Augenblicke seiner tiefsten Lage haben; so braucht man nach §. 11 nur $\frac{\omega^2}{2g} = \rho$ zu setzen, wodurch man diese Spannung $= 3p$ erhält. Der von der Centrifugalkraft herrührende Theil dieser Spannung ist $= 2p$, und wenn man dazu das Gewicht p des Körpers addirt; so erhält man die Gesammtspannung $= 3p$.

Princip der Transmission oder Fortpflanzung der Arbeit bei der Bewegung eines materiellen Punktes.

§. 23. Wir wollen annehmen, daß auf einen materiellen Punkt eine beliebige Anzahl von Kräften nach verschiedenen Richtungen wirken. Wenn F die Resultante aus diesen Kräften in einem beliebigen Augenblicke der Bewegung, p das Gewicht des materiellen Punktes, ω die Geschwindigkeit desselben und ϑ den Winkel bezeichnet, welchen die Richtung dieser Geschwindigkeit mit der Richtung der Resultante F bildet; so hat man nach §. 19 und §. 20 zwischen dieser Geschwindigkeit und der Tangentialkomponente der Kraft F die Relation:

$$F \cos \vartheta = \frac{p}{g} \cdot \frac{d\omega}{dt},$$

welche sowohl für die Zeichen, wie für die Zahlenwerthe statt findet, weil wenn ϑ stumpf und folglich $\cos \vartheta$ negativ ist, die Tan-

gentialkomponente $F\cos\delta$ zu gleicher Zeit eine Geschwindigkeitsabnahme bewirkt, so daß auch $d\omega$ negativ ist.

Betrachten wir nun die Kräfte, deren Resultante F ist, und bilden daraus zwei Gruppen, wovon die erste diejenigen enthält, deren Tangentialkomponenten in dem Sinne der Geschwindigkeit ω wirken, während die zweite Gruppe die Kräfte enthält, deren Tangentialkomponenten nach entgegengesetztem Sinne wirken; so haben wir nach §. 16, wenn ΣP die Summe der ersten und $\Sigma P'$ die der zweiten Gruppe von Komponenten bezeichnet, die Relation:

$$\Sigma P - \Sigma P' = F\cos\delta,$$

welche sowohl für die Zeichen, wie für die Zahlenwerthe statt findet. Vermöge dieser beiden letzten Gleichungen hat man folglich immer:

$$\Sigma P - \Sigma P' = \frac{p}{g}\cdot\frac{d\omega}{dt}.$$

Wenn ds den unendlich kleinen Bogen bezeichnet, welchen der betrachtete materielle Punkt in dem unendlich kleinen Zeitelement dt beschreibt, so erhält man, wenn man beide Theile der letzten Gleichung mit ds multiplicirt:

$$\Sigma P ds - \Sigma P' ds = \frac{p}{g}\cdot\frac{d\omega}{dt}\cdot ds = \frac{p}{g}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot d\omega,$$

oder wenn man bemerkt, daß $\frac{ds}{dt} = \omega$ ist:

$$\Sigma P ds - \Sigma P' ds = \frac{p}{g}\cdot\omega d\omega.$$

Wenn man die beiden Theile dieser letzten Gleichung zwischen den Grenzen integrirt, welche zwei beliebigen Lagen des beweglichen Punktes entsprechen, so hat man, wenn s_0, s_1 und ω_0, ω_1 resp. die diesen Lagen entsprechenden, von einem festen Punkte aus gezählten Bogen der Trajektorie und Geschwindigkeit bezeichnen:

$$\Sigma\int_{s_0}^{s_1} P ds - \Sigma\int_{s_0}^{s_1} P' ds = \frac{p}{g}\cdot\frac{\omega_1^2}{2} - \frac{p}{g}\cdot\frac{\omega_0^2}{2}.$$

Um aber die Bedeutung dieser Gleichung und die daraus fließenden Folgerungen auf eine einfache und klare Weise ausdrücken zu können, ist es durchaus nothwendig, vorher einige neue Benennungen und Definitionen anzugeben.

§. 24 Es bezeichne F eine beliebige Kraft, welche auf einen einzelnen materiellen Punkt, oder auf einen zu einem Syſteme, deſſen Bewegung auch noch von vielen andern Kräften als F herrühren kann, gehörigen materiellen Punkt wirkt. Wenn die Richtung dieſer Kraft mit der Richtung der Geſchwindigkeit des betrachteten materiellen Punktes einen ſpitzen Winkel bildet, und dieſe Kraft folglich dieſe Geſchwindigkeit zu vergrößern ſtrebt; ſo wollen wir ſie eine Bewegungskraft nennen; aber wenn ihre Richtung mit der der Geſchwindigkeit des materiellen Punktes einen ſtumpfen Winkel bildet, und ſie folglich dieſe Geſchwindigkeit zu vermindern ſtrebt, ſo wollen wir ſie eine Widerſtandskraft nennen. Hiernach entſpricht die Summe ΣP den Bewegungs- und die Summe $\Sigma P'$ den Widerſtandskräften.

Das Integral $\int P ds$, wovon jedes Element $P ds$ das Produkt aus der Tangentialkomponente einer Kraft F und aus dem von ihrem Angriffspunkte beſchriebenen unendlich kleinen Bogen ds iſt, wird die dieſer Kraft F entſprechende Quantität Arbeit und das Produkt $P ds$ das derſelben Kraft entſprechende Element der Arbeit genannt. Wenn die Kraft F eine Bewegungskraft iſt, ſo wird auch die ihr entſprechende Arbeit $\int P ds$ Bewegungsarbeit, und wenn dieſe Kraft eine Widerſtandskraft iſt, ſo wird auch die entſprechende Arbeit Widerſtandsarbeit genannt.

Das Arbeitselement $P ds$ kann auch aus einem andern Geſichtspunkte betrachtet werden; denn wenn δ den Winkel bezeichnet, welchen die Richtung des Elementes ds mit der Richtung der auf den materiellen Punkt wirkenden Kraft F, deren Tangentialkomponente P iſt, bildet; ſo hat man:

$$P = F \cos\delta, \text{ folglich } P ds = F \cos\delta . ds.$$

Nun iſt aber das Produkt $\cos\delta . ds$ offenbar nichts anders, als die Projektion von ds auf die Richtung der Kraft F, und wenn man folglich dieſe Projektion mit df bezeichnet; ſo hat man:

$$P ds = F df, \text{ und folglich } \int P ds = \int F df.$$

Die Arbeit $\int P ds$ wird alſo auch durch das Integral $\int F df$ ausgedrückt, welches aus einer Summe von Elementen $F df$ beſteht, wovon jedes das Produkt aus jedem Werthe der Kraft F und der Projection df des unendlich kleinen Bogens ds auf die Richtung dieſer Kraft iſt.

§. 25. Aus der Definition der Arbeit oder des Arbeitselementes folgt unmittelbar, daß man bei der Beſtimmung dieſer Größen ſtatt der Quantität Arbeit einer Kraft die Summe der Quantitäten Arbeit ihrer Komponenten nehmen kann, und ebenſo kann man für das einem unendlich kleinen Bogen ds entſpre-

chende Arbeitselement die Summe der den Projektionen dieſes Bogens auf verſchiedene Richtungen entſprechenden Arbeitselemente, d. h. ſeine Komponenten nach den verſchiedenen Richtungen nehmen. Denn nach §. 16 iſt die Projektion der Reſultante aus einem Syſteme von Kräften, welche nach verſchiedenen Richtungen auf denſelben materiellen Punkt wirken, auf eine beliebige gerade Linie immer die algebraiſche Summe der Projektionen der Komponenten auf dieſelbe gerade Linie. Wenn man folglich die Richtung des Bogens ds zur Projektionsaxe nimmt und die Projektionen der Komponenten von P auf dieſe Axe mit P_1, P_2, P_3 etc. bezeichnet; ſo hat man:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \text{etc.},$$

folglich:

$$\int P ds = \int P_1 ds + \int P_2 ds + \int P_3 ds + \text{etc.},$$

welche Gleichung die erſte der erwähnten Transformationen ausdrückt.

Desgleichen, wenn δ_1, δ_2, δ_3, etc. die Winkel bezeichnen, welche die Projektionen oder Komponenten ds_1, ds_2, ds_3, etc. des unendlich kleinen Bogens ds mit der Richtung der Kraft F bilden; ſo hat man, wenn man dieſen Bogen und ſeine Komponenten auf die Richtung der Kraft F projicirt, die Gleichung:

$$df = \cos\delta . ds = \cos\delta_1 . ds_1 + \cos\delta_2 . ds_2 + \cos\delta_3 . ds_3 + \text{etc.},$$

folglich:

$$\int F df = \int F \cos\delta_1 ds_1 + \int F \cos\delta_2 ds_2 + \int F \cos\delta_3 ds_3 + \text{etc.},$$

welche die zweite der angeführten Transformationen ausdrückt, weil jedes Glied des zweiten Theiles die Quantität Arbeit ausdrückt, welche man erhalten würde, wenn der materielle Punkt, auf welchen die Kraft F wirkt, den in dieſem Gliede als Faktor vorkommenden kleinen Bogen beſchriebe.

Wenn alſo X, Y, Z die Komponenten der Kraft F nach drei rechtwinkligen Axen, und dx, dy, dz die Komponenten oder Projektionen des Bogens ds nach denſelben Richtungen bezeichnen; ſo hat man nach dem vorhin Geſagten die Relation:

$$P ds = F df = X dx + Y dy + Z dz;$$

denn in dieſem Falle ſind die Größen $F \cos\delta_1$, $F \cos\delta_2$, $F \cos\delta_3$ nichts anders, als die Komponenten X, Y, Z der Kraft F, und die Komponenten ds_1, ds_2, ds_3 des Bogens ds ſind nichts anders, als dx, dy, dz. Vermöge der obigen Gleichung kann

man folglich in den Ausdruck der Quantität Arbeit einer Kraft die Arbeitsquantitäten einführen, welche von Komponenten herrühren würden, die auf fingirte Punkte wirken, welche sich, wie die Projektionen des Punktes bewegen, worauf diese Kraft wirkt.

§. 26. Wir wollen die Größe $\frac{p\omega^2}{2g} = p.\frac{\omega^2}{2g}$ die lebendige Kraft nennen, und wir werden später sehen, wie diese Benennung durch die Natur der dadurch bezeichneten Größe gerechtfertigt wird.

Nach dem Vorhergehenden läßt sich nun leicht der in der Gleichung:

$$\Sigma\int_{s_0}^{s_1} P\,ds - \Sigma\int_{s_0}^{s_1} P'\,ds = \frac{p}{g}\frac{\omega^2}{2} - \frac{p}{g}\frac{\omega_0^2}{2} \qquad (1)$$

enthaltene Satz in Worten ausdrücken, nämlich: daß für eine beliebige Dauer der Bewegung die Differenz zwischen der Bewegungs- und Widerstandsarbeit der auf einen materiellen Punkt wirkenden Kräfte der Zunahme der lebendigen Kraft dieses Punktes während derselben Zeit gleich ist.

Vermittelst dieser Gleichung kann man die lebendige Kraft $\frac{p\omega^2}{2g}$ des beweglichen Punktes für einen beliebigen Augenblick bestimmen, wenn man dieselbe für einen andern Augenblick kennt, und die Quantitäten Arbeit für den entsprechenden Zeitraum berechnen kann, weshalb man diese Gleichung auch die Gleichung der lebendigen Kräfte genannt hat, welche wir die Gleichung der Transmission oder Uebertragung der Arbeit nennen wollen. Diese Benennung wird vollständig gerechtfertigt werden, wenn wir die vorhergehende Gleichung auf ein System materieller Punkte ausdehnen; aber sie läßt sich auch schon jetzt genügend rechtfertigen.

Denn wenn man die Bewegung von ihrem Beginne bis zu ihrem Ende, d. h. von dem Augenblicke an, wo die Geschwindigkeit $\omega_0 = 0$ war, bis zu dem Augenblicke, wo die letzte Geschwindigkeit $\omega_1 = 0$ wird, betrachtet; so hat man:

$$\Sigma\int_{s_0}^{s_1} P\,ds - \Sigma\int_{s_0}^{s_1} P'\,ds = 0 \text{ oder } \Sigma\int_{s_0}^{s_1} P\,ds = \Sigma\int_{s_0}^{s_1} P'\,ds, \qquad (2)$$

d. h. die Bewegungsarbeit ist in diesem Falle der Widerstandsarbeit gleich. Nun kann man sich aber vorstellen, daß die Kräfte, welche die Widerstandsarbeit hervorbringen, von der Wirkung materieller Punkte herrühren, die mit dem betrachteten in Berührung stehen, und auf welche Druckkräfte ausgeübt werden, die denen gleich und entgegengesetzt sind, welche sie selbst ausüben, und deren Totalarbeit $= \Sigma\int P'\,ds$ ist, welche für diese Punkte

als Bewegungsarbeit betrachtet werden muß. Man kann also sagen: daß die Arbeit $\Sigma \int P ds$ der auf den beweglichen Punkt während der ganzen Dauer der Bewegung wirkenden Bewegungskräfte ganz auf die materiellen Punkte übertragen wird, welche die Widerstandskräfte hervorgerufen haben. Aus diesem Gesichtspunkte betrachtet, kann die obige Gleichung (2) oder die Gleichung (1), woraus sie abgeleitet ist, die Gleichung der Uebertragung oder Fortpflanzung der Arbeit genannt werden; aber diese Benennung wird, wie schon bemerkt, noch besonders gerechtfertigt werden, wenn wir gezeigt haben werden, wie die Gleichung (1) auf ein beliebiges System materieller Punkte, oder auf eine Maschine ausgedehnt werden kann.

Wenn man die Gleichung der lebendigen Kräfte, oder der Uebertragung der Arbeit auf ein Zeitintervall anwendet, welches zwischen dem Augenblicke, wo der bewegliche Punkt eine Geschwindigkeit ω_0 hatte, und dem Augenblicke, worin die letzte Geschwindigkeit $\omega_1 = 0$ ist, liegt, und annimmt, daß während dieses Zeitraumes nur Widerstandskräfte P' wirken; so hat man:

$$\Sigma \int P' ds = p. \frac{\omega_0^2}{2g}.$$

Wenn nun, wie wir eben bemerkt haben, die Arbeit $\int P' ds$ der Widerstandskräfte von äußern materiellen Punkten herrührt, welche ihre Wirkungen auf den beweglichen Punkt ausüben; so haben diese äußern Punkte eine Quantität Bewegungsarbeit erhalten, welche genau durch $p. \frac{\omega_0^2}{2g}$ gemessen wird.

Diese letzte Größe kann folglich als der Ausdruck der Arbeit betrachtet werden, welche ein Körper von dem Gewichte p und der Geschwindigkeit ω_0 hervorbringen kann, indem er bis zu dem Erlöschen dieser Geschwindigkeit auf andere materielle Punkte wirkt. Man könnte daher die Größe $p \frac{\omega_0^2}{2g}$ die disponible Quantität Arbeit des Körpers nennen, und man sieht demnach, warum einige Schriftsteller und praktische Mechaniker, welche unter dem Ausdrucke Kraft dasselbe verstanden, was wir Arbeit genannt haben, das Produkt $p \frac{\omega_0^2}{2g}$ lebendige Kraft nennen.

Relative Bewegung eines materiellen Punktes.

§. 27. Statt die Bewegung eines materiellen Punktes auf feste Axen im Raume zu beziehen, kann es zuweilen erforderlich sein, dieselbe auf Axen zu beziehen, welche sich mit irgend einer Geschwindigkeit im Raume fortbewegen, aber dabei ihre gegenseitige Lage beibehalten. Alsdann sind die Geschwindigkeiten des

beweglichen Punktes in Beziehung auf dieſe Axen relative Geſchwindigkeiten, und wir wollen jetzt unterſuchen, welche Relationen zwiſchen dieſen relativen Geſchwindigkeiten und den Kräften ſtatt finden.

Es ſeien x_1, y_1, z_1 die Koordinaten des beweglichen Punktes in Beziehung auf die drei feſten rechtwinkligen Axen, x, y, z die Koordinaten deſſelben Punktes in Beziehung auf die beweglichen rechtwinkligen Axen, ξ, η, ζ die Koordinaten des beweglichen Anfangspunktes in Beziehung auf die feſten Axen, a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' die Koſinus der Winkel, welche die beweglichen Axen mit den feſten Axen bilden, und endlich $\widehat{(xx_1)}$, ... die Winkel, welche die Axen der x und der x_1, ... mit einander bilden; ſo hat man:

$$a = \cos\widehat{(xx_1)},\quad b = \cos\widehat{(yx_1)},\quad c = \cos\widehat{(zx_1)},$$

$$a' = \cos\widehat{(xy_1)},\quad b' = \cos\widehat{(yy_1)},\quad c' = \cos\widehat{(zy_1)},$$

$$a'' = \cos\widehat{(xz_1)},\quad b'' = \cos\widehat{(yz_1)},\quad c'' = \cos\widehat{(zz_1)}.$$

Dieſe Koſinus, ſo wie die Koordinaten ξ, η, ζ des beweglichen Anfangspunktes ſind Funktionen der Zeit, und die bekannten Formeln, welche die Relationen zwiſchen zwei rechtwinkligen Koordinatenſyſtemen ausdrücken, geben:

$$x_1 = \xi + ax + by + cz,$$
$$y_1 = \eta + a'x + b'y + c'z,$$
$$z_1 = \zeta + a''x + b''y + c''z.$$

Differenzirt man dieſe Gleichungen in Beziehung auf die Zeit t, ſo erhält man:

$$(\mathfrak{B})\quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{d\xi}{dt} + x\frac{da}{dt} + y\frac{db}{dt} + z\frac{dc}{dt} + a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt} + c\frac{dz}{dt}, \\ \frac{dy_1}{dt} = \frac{d\eta}{dt} + x\frac{da'}{dt} + y\frac{db'}{dt} + z\frac{dc'}{dt} + a'\frac{dx}{dt} + b'\frac{dy}{dt} + c'\frac{dz}{dt}, \\ \frac{dz_1}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} + x\frac{da''}{dt} + y\frac{db''}{dt} + z\frac{dc''}{dt} + a''\frac{dx}{dt} + b''\frac{dy}{dt} + c''\frac{dz}{dt}. \end{cases}$$

Wir wollen die Komponenten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ der relativen Geſchwindigkeit des materiellen Punktes in Beziehung auf die beweglichen Axen reſp. mit u, v, w und die Komponenten $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$, $\frac{dz_1}{dt}$

der absoluten Geschwindigkeit desselben in Beziehung auf die festen Axen mit u_1, v_1, w_1 bezeichnen. Ferner seien u_e, v_e, w_e die analogen Komponenten für eine fingirte Bewegung in Beziehung auf die festen Axen, welche die des materiellen Punktes sein würde, wenn derselbe in dem betrachteten Augenblicke plötzlich auf eine unveränderliche Weise mit den beweglichen Axen verbunden würde; so hat man die Relationen:

$$\left.\begin{aligned} u_e &= \frac{d\xi}{dt} + x\frac{da}{dt} + y\frac{db}{dt} + z\frac{dc}{dt}, \\ v_e &= \frac{d\eta}{dt} + x\frac{da'}{dt} + y\frac{db'}{dt} + z\frac{dc'}{dt}, \\ w_e &= \frac{d\zeta}{dt} + x\frac{da''}{dt} + y\frac{db''}{dt} + z\frac{dc''}{dt}, \end{aligned}\right\} \qquad (k)$$

und die Gleichungen (B) verwandeln sich also in folgende:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u_e + au + bv + cw, \\ v_1 &= v_e + a'u + b'v + c'w, \\ w_1 &= w_e + a''u + b''v + c''w. \end{aligned}\right\} \qquad (i)$$

§. 28. Wir wollen zunächst die Eigenschaften dieser Geschwindigkeiten etwas näher untersuchen. Wenn man von der Geschwindigkeit des beweglichen Anfangspunktes abstrahirt, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} u_e &= x\frac{da}{dt} + y\frac{db}{dt} + z\frac{dc}{dt}, \\ v_e &= x\frac{da'}{dt} + y\frac{db'}{dt} + z\frac{dc'}{dt}, \\ w_e &= x\frac{da''}{dt} + y\frac{db''}{dt} + z\frac{dc''}{dt}. \end{aligned}\right\} \qquad (l)$$

Zwischen den Kosinussen a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' finden bekanntlich die Relationen statt:

$$\left\{\begin{aligned} b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1, & bc + b'c' + b''c'' &= 0, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1, & ca + c'a' + c''a'' &= 0, \\ a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1, & ab + a'b' + a''b'' &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (n)$$

woraus sich durch Differenzirung ergibt:

$$\left.\begin{aligned} bdb + b'db' + b''db'' &= 0, \\ cdc + c'dc' + c''dc'' &= 0, \\ ada + a'da' + a''da'' &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (p)$$

$$\left.\begin{aligned} bdc + b'dc' + b''dc'' &= -(cdb + c'db' + c''db''), \\ cda + c'da' + c''da'' &= -(adc + a'dc' + a''dc''), \\ adb + a'db' + a''db'' &= -(bda + b'da' + b''da''). \end{aligned}\right\} \qquad (q)$$

Wir wollen der Kürze wegen setzen:

$$\left.\begin{aligned} cdb + c'db' + c''db'' &= pdt, \\ adc + a'dc' + a''dc'' &= qdt, \\ bda + b'da' + b''da'' &= rdt, \end{aligned}\right\} \qquad (r)$$

und U_e sei die fingirte Geschwindigkeit, deren Komponenten nach den festen Axen resp. u_e, v_e, w_e sind. Wenn man die Komponenten derselben Geschwindigkeit nach den beweglichen Axen haben will, so muß man bemerken, daß man nach der bekannten Theorie der Projektionen die Relation hat:

$$U_e \cos(\widehat{U_e x}) = au_e + a'v_e + a''w_e.$$

Multiplicirt man folglich die erste der Gleichungen (l) mit a, die zweite a', die dritte a'' und addirt die Produkte zusammen; so kommt:

$$\begin{aligned} U_e \cos(\widehat{U_e x}) = x\frac{ada}{dt} &+ y\frac{adb}{dt} + z\frac{adc}{dt} \\ + x\frac{a'da'}{dt} &+ y\frac{a'db'}{dt} + z\frac{a'dc'}{dt} \\ + x\frac{a''da''}{dt} &+ y\frac{a''db''}{dt} + z\frac{a''dc''}{dt}, \end{aligned}$$

oder wenn man die obigen Relationen berücksichtigt:

$$U_e \cos(\widehat{U_e x}) = -ry + qz = qz - ry.$$

Durch eine ähnliche Rechnung findet man eben so:

$$U_e \cos(\widehat{U_e y}) = rx - pz,$$

$$U_e \cos(\widehat{U_e z}) = py - qx.$$

gentialkomponente $F \cos \delta$ zu gleicher Zeit eine Geschwindigkeitsabnahme bewirkt, so daß auch $d\omega$ negativ ist.

Betrachten wir nun die Kräfte, deren Resultante F ist, und bilden daraus zwei Gruppen, wovon die erste diejenigen enthält, deren Tangentialkomponenten in dem Sinne der Geschwindigkeit ω wirken, während die zweite Gruppe die Kräfte enthält, deren Tangentialkomponenten nach entgegengesetztem Sinne wirken; so haben wir nach §. 16, wenn ΣP die Summe der ersten und $\Sigma P'$ die der zweiten Gruppe von Komponenten bezeichnet, die Relation:

$$\Sigma P - \Sigma P' = F \cos \delta,$$

welche sowohl für die Zeichen, wie für die Zahlenwerthe statt findet. Vermöge dieser beiden letzten Gleichungen hat man folglich immer:

$$\Sigma P - \Sigma P' = \frac{p}{g} \cdot \frac{d\omega}{dt}.$$

Wenn ds den unendlich kleinen Bogen bezeichnet, welchen der betrachtete materielle Punkt in dem unendlich kleinen Zeitelemente dt beschreibt, so erhält man, wenn man beide Theile der letzten Gleichung mit ds multiplicirt:

$$\Sigma P ds - \Sigma P' ds = \frac{p}{g} \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot ds = \frac{p}{g} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot d\omega,$$

oder wenn man bemerkt, daß $\frac{ds}{dt} = \omega$ ist:

$$\Sigma P ds - \Sigma P' ds = \frac{p}{g} \cdot \omega d\omega.$$

Wenn man die beiden Theile dieser letzten Gleichung zwischen den Grenzen integrirt, welche zwei beliebigen Lagen des beweglichen Punktes entsprechen, so hat man, wenn s_0, s_1 und ω_0, ω_1 resp. die diesen Lagen entsprechenden, von einem festen Punkte aus gezählten Bogen der Trajektorie und Geschwindigkeit bezeichnen:

$$\Sigma \int_{s_0}^{s_1} P ds - \Sigma \int_{s_0}^{s_1} P' ds = \frac{p}{g} \cdot \frac{\omega_1^2}{2} - \frac{p}{g} \cdot \frac{\omega_0^2}{2}.$$

Um aber die Bedeutung dieser Gleichung und die daraus fließenden Folgerungen auf eine einfache und klare Weise ausdrücken zu können, ist es durchaus nothwendig, vorher einige neue Benennungen und Definitionen anzugeben.

§. 24 Es bezeichne F eine beliebige Kraft, welche auf einen einzelnen materiellen Punkt, oder auf einen zu einem Syſteme, deſſen Bewegung auch noch von vielen andern Kräften als F herrühren kann, gehörigen materiellen Punkt wirkt. Wenn die Richtung dieſer Kraft mit der Richtung der Geſchwindigkeit des betrachteten materiellen Punktes einen ſpitzen Winkel bildet, und dieſe Kraft folglich dieſe Geſchwindigkeit zu vergrößern ſtrebt; ſo wollen wir ſie eine Bewegungskraft nennen; aber wenn ihre Richtung mit der der Geſchwindigkeit des materiellen Punktes einen ſtumpfen Winkel bildet, und ſie folglich dieſe Geſchwindigkeit zu vermindern ſtrebt, ſo wollen wir ſie eine Widerſtandskraft nennen. Hiernach entſpricht die Summe ΣP den Bewegungs- und die Summe $\Sigma P'$ den Widerſtandskräften.

Das Integral $\int P ds$, wovon jedes Element $P ds$ das Produkt aus der Tangentialkomponente einer Kraft F und aus dem von ihrem Angriffspunkte beſchriebenen unendlich kleinen Bogen ds iſt, wird die dieſer Kraft F entſprechende Quantität Arbeit und das Produkt $P ds$ das derſelben Kraft entſprechende Element der Arbeit genannt. Wenn die Kraft F eine Bewegungskraft iſt, ſo wird auch die ihr entſprechende Arbeit $\int P ds$ Bewegungsarbeit, und wenn dieſe Kraft eine Widerſtandskraft iſt, ſo wird auch die entſprechende Arbeit Widerſtandsarbeit genannt.

Das Arbeitselement $P ds$ kann auch aus einem andern Geſichtspunkte betrachtet werden; denn wenn δ den Winkel bezeichnet, welchen die Richtung des Elementes ds mit der Richtung der auf den materiellen Punkt wirkenden Kraft F, deren Tangentialkomponente P iſt, bildet; ſo hat man:

$$P = F \cos\delta, \text{ folglich } P ds = F \cos\delta . ds.$$

Nun iſt aber das Produkt $\cos\delta . ds$ offenbar nichts anders, als die Projektion von ds auf die Richtung der Kraft F, und wenn man folglich dieſe Projektion mit df bezeichnet; ſo hat man:

$$P ds = F df, \text{ und folglich } \int P ds = \int F df.$$

Die Arbeit $\int P ds$ wird alſo auch durch das Integral $\int F df$ ausgedrückt, welches aus einer Summe von Elementen $F df$ beſteht, wovon jedes das Produkt aus jedem Werthe der Kraft F und der Projection df des unendlich kleinen Bogens ds auf die Richtung dieſer Kraft iſt.

§. 25. Aus der Definition der Arbeit oder des Arbeitselementes folgt unmittelbar, daß man bei der Beſtimmung dieſer Größen ſtatt der Quantität Arbeit einer Kraft die Summe der Quantitäten Arbeit ihrer Komponenten nehmen kann, und ebenſo kann man für das einem unendlich kleinen Bogen ds entſpre-

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \left[\frac{d^2\xi}{dt^2} + x\frac{d^2a}{dt^2} + y\frac{d^2b}{dt^2} + z\frac{d^2c}{dt^2}\right] + \left[a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{d^2z}{dt^2}\right]$$
$$+ 2\left[\frac{dx}{dt}\cdot\frac{da}{dt} + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{db}{dt} + \frac{dz}{dt}\cdot\frac{dc}{dt}\right].$$

Wendet man nun die eben erwähnten Bezeichnungen an, so kann der erste Theil dieser Gleichung durch $\frac{d_1u_1}{dt}$ ausgedrückt werden, und da die in der ersten Parenthese stehenden Glieder genau das Differenzial des durch die erste der Gleichungen (*h*) gegebenen Werthes von u_e bilden, indem man x, y, z als konstant betrachtet; so kann man die in dieser Parenthese stehende Größe durch $\frac{d_eu_e}{dt}$ ausdrücken, so daß die vorhergehende Gleichung folgende Form annimmt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d_1u_1}{dt} &= \frac{d_eu_e}{dt} + \left(a\frac{du}{dt} + b\frac{dv}{dt} + c\frac{dw}{dt}\right)\\ &\quad + 2\left[u\frac{da}{dt} + v\frac{db}{dt} + w\frac{dc}{dt}\right],\end{aligned}\right\}$$

und wenn man die beiden letzten der Gleichungen (B) auf dieselbe Weise behandelt; so erhält man ebenso:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d_1v_1}{dt} &= \frac{d_ev_e}{dt} + \left(a'\frac{du}{dt} + b'\frac{dv}{dt} + c'\frac{dw}{dt}\right)\\ &\quad + 2\left[u\frac{da'}{dt} + v\frac{db'}{dt} + w\frac{dc'}{dt}\right],\\ \frac{d_1w_1}{dt} &= \frac{d_ew_e}{dt} + \left(a''\frac{du}{dt} + b''\frac{dv}{dt} + c''\frac{dw}{dt}\right)\\ &\quad + 2\left[u\frac{da''}{dt} + v\frac{db''}{dt} + w\frac{dc''}{dt}\right].\end{aligned}\right\} \quad (s)$$

Wenn Π das Gewicht des materiellen Punktes, F die seine absolute Bewegung bewirkende Kraft und α, β, γ die Winkel bezeichnen, welche die Richtung dieser Kraft mit den festen Axen bildet; so hat man nach den Relationen im §. 17:

$$\left.\begin{aligned}F\cos\alpha &= \frac{\Pi}{g}\cdot\frac{d_1u_1}{dt},\\ F\cos\beta &= \frac{\Pi}{g}\cdot\frac{d_1v_1}{dt},\\ F\cos\gamma &= \frac{\Pi}{g}\cdot\frac{d_1w_1}{dt}.\end{aligned}\right\} \quad (t)$$

Aus den Gleichungen (s) ergibt sich, nachdem man sie durch $\frac{\Pi}{g}$ multiplicirt hat:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\Pi}{g}\left(a\frac{du}{dt}+b\frac{dv}{dt}+c\frac{dw}{dt}\right)\\
&\quad=F\cos\alpha-\frac{\Pi}{g}\cdot\frac{dv_e}{dt}-\frac{2\Pi}{g}\left(u\frac{da}{dt}+v\frac{db}{dt}+w\frac{dc}{dt}\right),\\
&\frac{\Pi}{g}\left(a'\frac{du}{dt}+b'\frac{dv}{dt}+c'\frac{dw}{dt}\right)\\
&\quad=F\cos\beta-\frac{\Pi}{g}\cdot\frac{dv_e}{dt}-\frac{2\Pi}{g}\left(u\frac{da'}{dt}+v\frac{db'}{dt}+w\frac{dc'}{dt}\right),\\
&\frac{\Pi}{g}\left(a''\frac{du}{dt}+b''\frac{dv}{dt}+c''\frac{dw}{dt}\right)\\
&\quad=F\cos\gamma-\frac{\Pi}{g}\cdot\frac{dv_e}{dt}-\frac{2\Pi}{g}\left(u\frac{da''}{dt}+v\frac{db''}{dt}+w\frac{dc''}{dt}\right),
\end{aligned}\right\}\quad(u)$$

und wenn man bemerkt, daß die Projektion einer Kraft auf eine Axe der Summe der Projektionen der Komponenten derselben auf dieselbe Axe gleich ist; so erkennt man leicht, daß die ersten Theile der drei vorhergehenden Gleichungen die Projektionen einer fingirten Kraft, deren Komponenten nach den beweglichen Axen resp. $\frac{\Pi}{g}\cdot\frac{du}{dt}$, $\frac{\Pi}{g}\cdot\frac{dv}{dt}$, $\frac{\Pi}{g}\cdot\frac{dw}{dt}$ sind, auf die drei festen Axen ausdrücken. Diese fingirte Kraft ist diejenige, welche für einen sich mit den beweglichen Axen fortbewegten Beobachter die relative Bewegung des materiellen Punktes in Beziehung auf diese beweglichen Axen hervorbringen könnte.

Die in den zweiten Theil derselben Gleichungen vorkommenden Glieder $\frac{\Pi}{g}\cdot\frac{du_e}{dt}$, $\frac{\Pi}{g}\cdot\frac{dv_e}{dt}$, $\frac{\Pi}{g}\cdot\frac{dw_e}{dt}$ sind die Komponenten der Kraft nach den festen Axen, welche die Fortbewegung des materiellen Punktes mit den beweglichen Axen bewirken könnte. Wir wollen diese Kraft durch F_e, die Winkel, welche ihre Richtung mit den beweglichen Axen bildet, durch l_e, m_e, n_e und die Winkel, welche die Richtung der Kraft F mit denselben beweglichen Axen bildet, durch l, m, n bezeichnen.

Wenn man die erste der Gleichungen (u) mit a, die zweite a', die dritte a'' multiplicirt, die Produkte zusammenaddirt, dann in Beziehung auf b, b', b'' und c, c', c'' eben so verfährt, und endlich die weiter oben angegebenen Relationen zwischen diesen verschiedenen Kosinussen und ihren Differenzialen berücksichtigt; so erhält man nach verrichteten Reduktionen die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\Pi}{g}\cdot\frac{du}{dt} &= F\cos l - F_e\cos l_e - \frac{2\Pi}{g}(qw-rv),\\
\frac{\Pi}{g}\cdot\frac{dv}{dt} &= F\cos m - F_e\cos m_e - \frac{2\Pi}{g}(ru-pw),\\
\frac{\Pi}{g}\cdot\frac{dw}{dt} &= F\cos n - F_e\cos n_e - \frac{2\Pi}{g}(pv-qu),
\end{aligned}\right\} \qquad (v)$$

worin die Projektionen der Kräfte auf die beweglichen Axen und nicht mehr die auf die festen Axen vorkommen. Diese Gleichungen zeigen, daß man die relative Bewegung eines materiellen Punktes in Beziehung auf bewegliche Axen ebenso behandeln kann, wie eine absolute Bewegung in Beziehung auf feste Axen, wenn man annimmt, daß außer der wirklichen Kraft F noch zwei fingirte Kräfte auf den materiellen Punkt wirken. Die erste dieser fingirten Kräfte ist der Kraft F_e, welche die Fortbewegung des materiellen Punktes mit den beweglichen Axen, d. h. die Bewegung dieses Punktes hervorbringen könnte, welche derselbe annehmen würde, wenn er plötzlich auf eine unveränderliche Weise mit den beweglichen Axen verbunden würde, gleich und gerade entgegengesetzt.

Die Projektionen der zweiten fingirten Kraft auf die beweglichen Axen sind:

$$-\frac{2\Pi}{g}(qw-rv), -\frac{2\Pi}{g}(ru-pw), -\frac{2\Pi}{g}(pv-qu),$$

und wenn man diese Kraft mit F′ bezeichnet; so hat man:

$$F' = \frac{2\Pi}{g}\sqrt{(qw-rv)^2+(ru-pw)^2+(pv-qu)^2}.$$

Die Richtung dieser Kraft ist auf den beiden Richtungen senkrecht, welche mit den beweglichen Axen Winkel bilden, deren Kosinus folgende Werthe haben:

$$\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}},\quad \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}},\quad \frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}},$$

und:

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},\quad \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},\quad \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},$$

und wenn man den von diesen beiden Richtungen gebildeten Winkel mit ϑ' bezeichnet; so findet man leicht:

$$\sin\vartheta = \frac{\sqrt{(qw-rv)^2+(ru-pw)^2+(pv-qu)^2}}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}\,.\,\sqrt{p^2+q^2+r^2}},$$

woraus folgt:

$$F' = 2\frac{\Pi}{g}\sqrt{p^2+q^2+r^2}\,.\,\sqrt{u^2+v^2+w^2}\,.\sin\vartheta'.$$

Nun ist aber $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ die Winkelgeschwindigkeit φ der Drehung um die augenblickliche Axe und $\sqrt{u^2+v^2+w^2}\,.\sin\vartheta'$ ist nichts anders, als die Projektion der relativen Geschwindigkeit $\sqrt{u^2+v^2+w^2}$ auf eine auf dieser Axe senkrechte Ebene, weil ϑ' den Winkel bezeichnet, welchen die Richtung dieser Geschwindigkeit mit der der augenblicklichen Drehungsaxe bildet. Bezeichnet man diese relative Geschwindigkeit mit Ω, so kann man folglich setzen:

$$F' = 2\frac{\Pi}{g}\,.\,\varphi\Omega\sin\vartheta'.$$

Diese letzte Gleichung lehrt: daß die zweite fingirte Kraft, welche man einführen muß, um die relative Bewegung wie eine absolute behandeln zu können, das Doppelte der Kraft ist, welche die Beschleunigung $\varphi\Omega\sin\vartheta'$ hervorbringen könnte, die das Produkt aus der Winkelgeschwindigkeit der Rotationsbewegung um die augenblickliche Axe und aus der Projektion der relativen Geschwindigkeit auf eine auf dieser Axe senkrechte Ebene ist, und ihre Richtung ist auf der augenblicklichen Rotationsaxe der beweglichen Axen und auf der Richtung der relativen Geschwindigkeit senkrecht.

Princip der Uebertragung oder Fortpflanzung der Arbeit bei der relativen Bewegung eines materiellen Punktes.

§. 30. Untersuchen wir nun, wie sich bei der relativen Bewegung eines freien materiellen Punktes das Princip der lebendigen Kräfte oder der Uebertragung der Arbeit gestaltet.

Wenn man die erste der Gleichungen (*v*) mit *udt*, die zweite mit *vdt*, die dritte mit *wdt* multiplicirt und die Produkte zusammenaddirt; so heben sich die Glieder mit $\frac{2\Pi}{g}$ gegenseitig auf, und wenn man bemerkt, daß man hat:

$$\Omega^2 = u^2+v^2+w^2, \text{ folglich } \Omega d\Omega = udu+vdv+wdw;$$

so läßt sich die erhaltene Gleichung auf folgende Form bringen:

$$\frac{\Pi}{g}\,\Omega d\Omega = \mathrm{F}(u\cos l + v\cos m + w\cos n)\,dt$$
$$-\mathrm{F}_1(u\cos l_1 + v\cos m_1 + w\cos n_1)\,dt;$$

es ist aber:

$$u = \Omega\cos(\widehat{\Omega x}),\quad v = \Omega\cos(\widehat{\Omega y}),\quad w = \Omega\cos(\widehat{\Omega z}),$$

und folglich hat man:

$$\frac{\Pi}{g}\,\Omega d\Omega = \mathrm{F}\Omega dt\,[\cos(\widehat{\Omega x})\cos l + \cos(\widehat{\Omega y})\cos m + \cos(\widehat{\Omega z})\cos n]$$
$$-\mathrm{F}_1\Omega dt\,[\cos(\widehat{\Omega x})\cos l_1 + \cos(\widehat{\Omega y})\cos m_1 + \cos(\widehat{\Omega z})\cos n_1],$$

oder vielmehr:

$$\frac{\Pi}{g}\,\Omega d\Omega = \mathrm{F}\,\Omega dt\cos(\widehat{\Omega\mathrm{F}}) - \mathrm{F}_1\Omega dt\cos(\widehat{\Omega\mathrm{F}_1}).$$

Wenn man mit df, df_1 die Projektionen des während der Zeit dt beschriebenen relativen Wegelementes auf die Richtungen der Kräfte F, F_1 bezeichnet, so verwandelt sich die letzte Gleichung in folgende:

$$\frac{\Pi}{g}\,\Omega d\Omega = \mathrm{F}df - \mathrm{F}_1 df_1,$$

woraus folgt, wenn man zwischen zwei Zeitmomenten integrirt, für welche die relative Geschwindigkeit die Werthe Ω_0 und Ω_1 hat:

$$\Pi\,\frac{\Omega_1^2}{2g} - \Pi\,\frac{\Omega_0^2}{2g} = \int \mathrm{F}\,df - \int \mathrm{F}_1\,df_1.$$

In dieser Gleichung kommt die zweite fingirte Kraft nicht vor, wie auch zu erwarten war, weil diese Kraft auf der Richtung der relativen Geschwindigkeit oder der des beschriebenen Wegelementes senkrecht ist, und folglich keine relative Arbeit hervorbringen kann.

Wenn man annimmt, wie wir es im Vorhergehenden gethan haben, daß die Kräfte F und F_1 die Resultanten aus mehreren andern Kräften sind, diese Kräfte auf die Richtung des Elementes ds des relativen Weges und nicht dieses Element selbst auf die Richtung jeder Kraft projicirt, was in Beziehung auf die Arbeit gleichgültig ist, dann diejenigen dieser Projektionen, welche in den Sinn der relativen Geschwindigkeit Ω fallen, zu einer ersten Gruppe, und die nach dem entgegengesetzten Sinne gerichteten zu

einer zweiten Gruppe verbindet, und endlich mit P, P' zwei beliebige Projektionen aus diesen beiden Gruppen, so wie mit P_e, P'_e zwei analoge Projektionen in Beziehung auf die Resultante F bezeichnet; so kann die vorhergehende Gleichung auf folgende Form gebracht werden:

$$\Pi \frac{\Omega_1^2}{2g} - \Pi \frac{\Omega_0^2}{2g} = \Sigma \int P ds - \Sigma \int P' ds - \Sigma \int P_e ds + \Sigma \int P'_e ds,$$

woraus folgt: daß die Gleichung der lebendigen Kräfte oder der Uebertragung der Arbeit auch noch bei der relativen Bewegung statt findet, wofern man zu der Arbeit der gegebenen Kräfte F noch die hinzufügt, welche die Kräfte hervorbringen würden, die denen gleich und entgegengesetzt sind, welche auf den materiellen Punkt wirken müßten, wenn sich derselbe so bewegen sollte, als wenn er mit den beweglichen Axen auf eine unveränderliche Weise fest verbunden wäre.

Princip der Uebertragung der Arbeit bei der relativen Bewegung, wenn sich die beweglichen Axen gleichförmig um eine gegebene Axe drehen.

§. 31. Um von diesem Principe eine Anwendung zu machen, wollen wir annehmen, daß die Bewegung der beweglichen Axen eine gleichförmige Rotationsbewegung um eine gegebene Axe sei; so ist die Kraft, welche dem materiellen Punkte dieselbe Rotationsbewegung ertheilen kann, als wenn er mit den beweglichen Axen auf eine unveränderliche Weise fest verbunden wäre, nichts anders als die Centripetalkraft und die der Kraft F_e gleiche und entgegengesetzte Kraft ist genau die Centrifugalkraft, welche durch:

$$\frac{\Pi}{g} \varphi^2 r$$

ausgedrückt wird, wo φ die Winkelgeschwindigkeit und r die Entfernung des materiellen Punktes von der Rotationsaxe ist.

Da dr das in dem Sinne der Centrifugalkraft beschriebene relative Wegelement ist, so reducirt sich das Glied $-\int F_e df_e$ auf $\int \frac{\Pi}{g} \varphi^2 r dr = \frac{\Pi}{2g} \varphi^2 (r_1^2 - r_0^2)$, wo r_1 und r_0 die den beiden Augenblicken, zwischen welchen die Gleichung der lebendigen Kräfte angewandt wird, entsprechenden Werthe der Entfernung r des materiellen Punktes von der Rotationsaxe bezeichnen.

Wenn u_1 und u_0 die Geschwindigkeiten bezeichnen, welche der materielle Punkt in den beiden erwähnten Augenblicken annehmen

würde, wenn derselbe mit den beweglichen Axen fest verbunden wäre; so hat man:

$$\varphi^2 r_1^2 = u_1^2 \text{ und } \varphi^2 r_0^2 = u_0^2,$$

so daß sich das vorhergehende Integral auf:

$$\frac{\Pi u_1^2}{2g} - \frac{\Pi u_0^2}{2g}$$

reducirt, und die Gleichung der lebendigen Kräfte auf folgende Form gebracht werden kann:

$$\Pi \frac{\Omega_1^2}{2g} - \Pi \frac{\Omega_0^2}{2g} = \Sigma \int P ds - \Sigma \int P' ds + \Pi \frac{u_1^2}{2g} - \Pi \frac{u_0^2}{2g},$$

woraus folgt: daß man bei der relativen Bewegung eines materiellen Punktes in Beziehung auf ein Axensystem, welches sich mit einer gleichförmigen Rotationsgeschwindigkeit um eine feste Axe drehet, zur Bestimmung des Zuwachses der relativen lebendigen Kraft nur zu der, wie bei der absoluten Bewegung, berechneten Quantität Arbeit den Zuwachs der lebendigen Kraft hinzuzufügen braucht, welcher der Rotationsgeschwindigkeit entspricht, die der materielle Punkt in seinen beiden äußersten Lagen haben würde, wenn derselbe in den beiden entsprechenden Augenblicken mit dem ganzen rotirenden Systeme fest verbunden wäre.

Gleichgewicht oder gegenseitige Aufhebung der auf einen materiellen Punkt wirkenden Kräfte.

§. 32. Man sagt: daß die auf einen materiellen Punkt wirkenden Kräfte einander gegenseitig aufheben, oder im Gleichgewichte sind, wenn sie diesen materiellen Punkt weder aus dem Zustande der Ruhe in den der Bewegung versetzen, noch die bereits erlangte Geschwindigkeit desselben, welche er unter der Wirkung anderer Kräfte annimmt, auf irgend eine Weise verändern können. So lange die betrachteten Kräfte eine Resultante haben, strebt diese offenbar dem materiellen Punkte, auf welchen sie wirkt, eine gewisse Bewegung zu ertheilen, oder die bereits angenommene Bewegung desselben zu verändern. Soll also das Gleichgewicht zwischen diesen Kräften statt finden, so muß ihre Resultante $= 0$ sein, wozu erfordert wird, daß die Projektionen der Resultante auf drei verschiedene Richtungen einzeln $= 0$ sind, und da die Projektion der Resultante auf eine Axe der algebraischen

Summe der Projektionen ihrer Komponenten auf dieſelbe Axe gleich iſt; ſo iſt zum Gleichgewichte eines auf denſelben materiellen Punkt wirkenden Syſtemes von Kräften erforderlich, daß die algebraiſche Summe der Projektionen dieſer Kräfte auf drei verſchiedene Richtungen für jede dieſer Richtungen einzeln $= 0$ iſt, welche Bedingung übrigens auch hinreichend iſt, weil, wenn ſie erfüllt wird, die Reſultante ſelbſt offenbar $= 0$ iſt.

Man kann dieſe Bedingung auch noch unter einer andern Form ausdrücken, welche in dem gegenwärtigen Falle zwar weder einfacher, noch bequemer iſt; aber bei der Unterſuchung des Gleichgewichtes ganzer Syſteme materieller Punkte, wie Körper und Maſchinen, weſentliche Vorzüge hat, und blos als Vorbereitung zu dieſer Unterſuchung mag die folgende Bemerkung hier Platz finden.

Bedingung des Gleichgewichtes eines materiellen Punktes durch das Princip der virtuellen Geſchwindigkeiten.

Wenn mehrere Kräfte auf denſelben materiellen Punkt wirken, ſo iſt nach §. 25 das Element der Arbeit der Reſultante der algebraiſchen Summe der Arbeitselemente der Komponenten gleich, von welcher Beſchaffenheit übrigens die Bewegung des materiellen Punktes auch ſein mag. Wenn folglich die Reſultante gleich Null iſt, und die Bewegung des materiellen Punktes, von welcher Beſchaffenheit ſie auch ſein mag, von andern Kräften als die betrachtete herrührt; ſo kann man ſagen, daß die zum Gleichgewichte erforderliche, aber auch hinreichende Bedingung darin beſteht: *daß die algebraiſche Summe der Elemente der Arbeit der betrachteten Kräfte für drei unendlich kleine Verrückungen des materiellen Punktes gleich Null ſind.*

Dieſe unendlich kleinen willkürlichen Verrückungen ſind hier *geometriſche Größen*, welche durchaus in keiner Beziehung zu den Kräften ſtehen, deren Gleichgewicht dargethan werden ſoll; denn ſie werden nur angewandt, um drei willkürliche Richtungen einzuführen, auf welche die Kräfte projicirt werden können, worauf dargethan werden muß, daß die algebraiſchen Summen dieſer Projektionen genau gleich Null ſind.

Dieſe unendlich kleinen willkürlichen Verrückungen oder Wege werden *virtuelle Geſchwindigkeiten* genannt, obgleich ſie keine wirklichen Geſchwindigkeiten ſind, und die dieſen unendlich kleinen Verrückungen entſprechenden Arbeitselemente hat man *virtuelle Momente* genannt, wo das Wort *virtuell* ausdrücken ſoll, daß hier nicht von wirklichen, ſondern von hypothetiſchen Bewegungen die Rede iſt, für welche es genügt, ſich ihre Möglichkeit vorſtellen zu können.

Man kann alſo ſagen: daß die auf einen materiellen Punkt wirkenden Kräfte im Gleichgewichte ſind wenn die algebraiſchen Summen ihrer Arbeitselemente für drei beliebige unendlich kleine Verrückungen Null ſind, oder wenn die algebraiſchen Summen der virtuellen Momente für drei verſchiedene virtuelle Bewegungen gleich Null ſind.

Hierin beſteht das ſogenannte Princip der virtuellen Geſchwindigkeiten, welches wir hier blos anführen, weil es ſpäter bei jeder Art des Gleichgewichtes zuſammengeſetzterer Syſteme vorkommt, und es zweckmäßig iſt, zuvor einen einfachen Fall deſſelben kennen zu lernen, obgleich es hier nur den Vortheil gewährt, die Bedeutung der in ſeinem Ausdrucke vorkommenden Benennungen kennen zu lehren, und in dem gegenwärtigen Falle iſt dieſes Princip genau beſehen, weiter nichts, als eine andere Ausdrucksweiſe der Bedingung des Gleichgewichtes: daß die Reſultante der betrachteten Kräfte gleich Null ſein muß. Dieſes Princip der virtuellen Geſchwindigkeiten gibt die für das Gleichgewicht erforderlichen und hinreichenden Bedingungen; denn wenn man in jeder Summe der Arbeitselemente, welche gleich Null iſt, das Wegelement oder die virtuelle Geſchwindigkeit als gemeinſchaftlichen Faktor hinwegläßt, ſo kommt man wieder auf die drei Gleichungen, welche ausdrücken: daß die allgebraiſchen Summen der Projektionen der Kräfte auf drei verſchiedene Richtungen gleich Null ſind.

Arbeit der gegenſeitigen Einwirkung zweier materieller Punkte auf einander.

§. 33. Wenn man von der Betrachtung eines einzelnen materiellen Punktes zu der eines Syſtemes materieller Punkte, oder gar einer beliebigen Maſchine übergehen will, um die Bewegung, oder das Gleichgewicht zu unterſuchen; ſo muß man nothwendig das Princip der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung zur Anwendung bringen, welches wir bereits bei der Unterſuchung der Bewegung eines materiellen Punktes angeführt haben, welcher ſich auf einer gegebenen Kurve bewegen muß (§. 21), wo wir annahmen, daß, wenn zwei Körper einen gegenſeitigen Druck auf einander ausüben, die von dem einen dieſer Körper auf den andern ausgeübte Wirkung genau der gleich und entgegengeſetzt iſt, welche dieſer auf jenen ausübt. Dieſe Erfahrungswahrheit iſt weiter nichts, als eine Folge aus dem Principe der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung zweier einander berührender Molekule, welches Princip man folgendermaßen ausdrücken kann:

Wenn zwei materielle Punkte m und m' durch Anziehung oder Abstoßung auf einander wirken, und die von m' auf m ausgeübte Wirkung ist eine nach der geraden Linie mm' gerichtete Kraft R; so ist die von m auf m' ausgeübte Wirkung eine Kraft R, welche ebenfalls nach der geraden Linie mm', aber nach entgegengesetztem Sinne gerichtet ist.

Man sieht leicht ein, daß ein Gesetz dieser Art nicht direkt durch das Experiment bestätigt werden kann; allein man wird zu der Annahme desselben geführt, wenn man bemerkt, daß zwischen den daraus abgeleiteten theoretischen Folgerungen und der Beobachtung der täglich vor unsern Augen stattfindenden mechanischen Erscheinungen stets eine vollkommene Uebereinstimmung statt findet.

§. 34. Als erste Folgerung aus diesem Principe wollen wir zeigen: daß, wenn r die veränderliche gegenseitige Entfernung zweier materieller Punkte m und m' bezeichnet, welche nach der Richtung ihre Verbindungslinie mm' gleiche und entgegengesetzte Wirkungen $= R$ auf einander ausüben, die Summe der Quantitäten der Bewegungs- und Widerstandsarbeit, wie sie in der Gleichung der lebendigen Kräfte vorkommen muß, sich immer auf $\int R dr$ reducirt, wo dieses Integral positiv, oder negativ ist, d. h. die Gesammtarbeit als Bewegungs- oder als Widerstandsarbeit betrachtet werden muß, jenachdem der Zuwachs dr bei der Bewegung der beiden materiellen Punkte in dem Sinne der Wirkung von R, oder in entgegengesetztem Sinne erfolgt.

Zu dem Zwecke müssen wir aber vorher zeigen, daß die Summe der von den gegenseitigen Einwirkungen zweier materieller Punkte auf einander herrührenden Quantitäten Arbeit nicht geändert wird, wenn diese Punkte außer ihrer relativen Bewegung noch eine gemeinschaftliche Bewegung haben, oder eine Bewegung, welche auf der Richtung ihrer Verbindungslinie mm' senkrecht ist, d. h. eine Rotationsbewegung um einen Punkt dieser geraden Linie.

In §. 25 haben wir aber gesehen, daß man bei der Berechnung der Arbeit für das beschriebene Wegelement die Summe seiner Komponenten setzen kann, so daß folglich, wenn ein materieller Punkt gleichzeitig mehrere Bewegungen hat, das absolute Arbeitselement erhalten wird, wenn man die Summe der für die einzelnen Bewegungen berechneten Arbeitselemente bildet. In dem gegenwärtigen Falle müßte man folglich zu dem blos in der Voraussetzung der relativen Bewegung der beiden materiellen Punkte berechneten Arbeitselemente noch die Arbeitselemente hin-

zufügen, welche den Bewegungen entsprechen, die diese materiellen Punkte außer ihrer relativen Bewegung noch haben sollen.

Wenn es sich aber zunächst um eine gemeinschaftliche Bewegung der beiden materiellen Punkte m,m' handelt, so sind die beschriebenen Wegelemente einander gleich, parallel und nach demselben Sinne gerichtet, und da die Kräfte $\mathbf{R}$ einander gleich und nach entgegengesetztem Sinne gerichtet sind; so sind die dieser Bewegung entsprechenden Arbeitselemente paarweise einander gleich und von entgegengesetztem Zeichen, und folglich ist ihre Summe, welche in die Gleichung der lebendigen Kräfte eingeführt werden muß, genau gleich Null.

Wenn zweitens die beiden materiellen Punkte m,m' außer ihrer relativen Bewegung noch eine andere Bewegung hätten, deren Geschwindigkeit auf der geraden Linie mm' senkrecht ist, oder wenn sie eine Rotationsbewegung um einen Punkt dieser geraden Linie hätten; so wären die Arbeitselemente beständig gleich Null, weil die Projektion einer Kraft auf eine auf ihr senkrechte gerade Linie gleich Null ist: und mithin ist auch die Summe der dieser Bewegung entsprechenden Quantitäten Arbeit $= 0$.

Um nun die den beiden gegenseitigen Einwirkungen $\mathbf{R}$ der beiden materiellen Punkte m,m' während ihrer Bewegung entsprechende Quantität Arbeit zu bestimmen, können wir, ohne diese Größe zu ändern, den beiden materiellen Punkten zunächst eine gemeinschaftliche Bewegung beilegen, welche der Bewegung eines derselben, z. B. m, gleich und entgegengesetzt ist; so bleibt der Punkt m in Ruhe, und der Punkt m' kann als zwei Bewegungen habend, angesehen werden, nämlich eine Bewegung, vermöge welcher er sich auf der Verbindungslinie mm' dem Punkte m nähert, oder davon entfernt, und eine zweite Bewegung, vermöge welcher sich diese gerade Linie selbst um den festen Punkt m drehet.

Geben wir nun dem Punkte m' noch eine Supplementarbewegung, welche der genau gleich und entgegengesetzt ist, mit welcher sich die gerade Linie mm' um den Punkt m drehet; so wird, da diese Supplementarbewegung auf der geraden Linie mm' senkrecht ist, die Arbeit nicht geändert, und wenn die gerade Linie mm' unbeweglich geworden ist, so hat der Punkt m' nur noch eine geradlinige Bewegung nach dieser geraden Linie. Das Arbeitselement reducirt sich also auf $\mathbf{R}dr$, wo das Zeichen desselben positiv ist, wenn der Weg dr in dem Sinne der Kraft $\mathbf{R}$ beschrieben ist, welche hier die Wirkung von m auf m' bezeichnet, und negativ, wenn dieser Weg dr in entgegengesetztem Sinne beschrieben ist. Die Gesammtarbeit für eine gewisse Dauer der Bewegung wird also durch das für diese Dauer genommene Integral $\int \mathbf{R}dr$ ausgedrückt.

Es ist wohl zu bemerken, daß, wenn die Entfernung r, ungeachtet der partiellen Veränderungen, welche sie während der Bewegung hat erfahren können, nach einer gewissen Zeit wieder

dieſelbe geworden und die Kraft R blos eine Funktion von r iſt, das ſich auf dieſe Zeitdauer beziehende Integral aus Elementen beſteht, welche paarweiſe einander gleich und von entgegengeſetztem Zeichen ſind, weil ſich die Kraft nach der Vorausſetzung nur mit der Entfernung r ändert, und der Totalwerth dieſes Integrales iſt folglich gleich Null. Es iſt alſo nicht blos die von den Molekularwirkungen herrührende Quantität Arbeit immer gleich Null, wenn die Entfernung r konſtant bleibt, ſondern auch, wenn ſich dieſe Entfernung ändert, aber denſelben Werth wieder annimmt.

Zweites Kapitel.

Bewegung eines festen Körpers.

§. 35. Man betrachtet gegenwärtig die festen Körper allgemein als Verbindungen von Molekulen, welche zwar nicht mit einander in Berührung stehen, aber gegenseitige Wirkungen auf einander ausüben. Diese Hypothese führt in Beziehung auf die Bewegung und das Gleichgewicht der Körper zu einfachen Gesetzen, und die aus diesen theoretischen Gesetzen abgeleiteten Folgerungen werden durch die Beobachtung bestätigt.

Princip der Uebertragung oder Mittheilung der Arbeit bei der Bewegung eines festen Körpers.

Wir nehmen an, daß auf die Molekule eines Körpers verschiedene äußere Kräfte wirken, wie z. B. die Schwere, und die bei der gegenseitigen Berührung der Körper statt findenden Einwirkungen, welche letztern jedoch unmittelbar nur auf die an der Oberfläche, oder in einer geringen Tiefe unter derselben an der Berührungsstelle wirken. Während der Bewegung des Körpers kann jedes Molekul desselben als ein ganz freier materieller Punkt betrachtet werden, wenn man annimmt, daß außer den eben erwähnten Kräften auch die benachbarten Molekule darauf wirken, und diese Kräfte in Rechnung bringt. Diese letztern Wirkungen wollen wir innere gegenseitige Kräfte nennen, weil sich dieselben nach dem Principe der Gleichheit und Entgegengesetztheit der Wirkung und Gegenwirkung, wie bereits bemerkt worden, immer so gruppiren lassen, daß sie paarweise einander gleich und entgegengesetzt sind. Wenn man folglich alle innern und äußern Kräfte in Betracht zieht, welche auf ein Molekul von dem Gewichte p wirken, so kann man darauf die in §. 23 aufgestellte Gleichung der lebendigen Kräfte:

$$p \cdot \frac{\omega_1^2}{2g} - p\frac{\omega_0^2}{2g} = \Sigma \int P ds - \Sigma \int P' ds$$

anwenden, und wenn man für alle Molekule des Körpers ähnliche Gleichungen aufstellt und die entsprechenden Theile derselben zusammenaddirt; so erhält man die Gleichung:

$$\Sigma p \cdot \frac{\omega_1^2}{2g} - \Sigma p \cdot \frac{\omega_0^2}{2g} = \Sigma \int P ds - \Sigma \int P' ds,$$

worin sich das Zeichen Σ im zweiten Theile nicht blos auf die Arbeit aller Tangentialkomponenten der auf jedes Molekul wirkenden Kräfte, sondern auch auf alle diese Molekul selbst erstreckt. In diesem zweiten Theile der Gleichung kommen sowohl die von den äußern, als die von den innern Kräften herrührenden Quantitäten Arbeit vor. Wenn aber in der Voraussetzung eines festen Körpers die gegenseitigen Entfernungen seiner Molekule ungeändert bleiben, so sind die von den innern Kräften herrührenden Quantitäten Arbeit nach §. 34 gleich Null, und es bleiben folglich in dem zweiten Theile der Gleichung der lebendigen Kräfte nur die Quantitäten Arbeit übrig, welche von den äußern Kräften herrühren, wie die Gewichte der Molekule und die von den Berührungen des betrachteten Körpers mit andern Körpern herrührenden Wirkungen. Später werden wir die Möglichkeit und die Mittel zur Berechnung der von diesen letzten Kräften herrührenden Quantitäten Arbeit näher nachweisen, und für den Augenblick mag die Aufstellung des folgenden Principes genügen, nämlich: daß bei der Bewegung eines festen Körpers, dessen Molekule dieselben gegenseitigen Abstände von einander behalten, das Princip der Uebertragung oder Mittheilung der Arbeit, wie für einen einzelnen materiellen Punkt statt findet, d. h. die Zunahme der Summe der lebendigen Kräfte zwischen zwei beliebigen Augenblicken der Bewegung ist gleich der Differenz zwischen der Bewegungs- und Widerstandsarbeit der auf den Körper wirkenden äußern Kräfte.

Gleichungen der Bewegung eines freien festen Körpers.

§. 36. Wenn man die Bewegung eines festen Körpers vollständig bestimmen will, so ist die Gleichung der lebendigen Kräfte, worin das vorhergehende Princip enthalten ist, im Allgemeinen zur Auflösung dieser Aufgabe nicht hinreichend. Denn denkt man sich drei rechtwinklige, mit dem Körper fest verbundene Koordinatenaxen, so ist zur vollständigen Bestimmung der Bewegung dieses Körpers erforderlich, daß man jeden Augenblick die Richtung dieser beweglichen Axen, so wie die Lage ihres beweglichen Anfangspunktes gegen drei feste Koordinatenaxen kennt, wozu aber erfordert wird, daß man die Werthe sechs veränderlicher Größen, nämlich die Koordinaten des beweglichen Anfangspunktes, ferner den Winkel ϑ, welchen die bewegliche Ebene der xy mit der festen Ebene der xy bildet, dann den Winkel ε, welchen ihr Durchschnitt

mit der Axe der x bildet, und den Winkel χ kennt, welchen derselbe Durchschnitt mit der Axe der x_1 bildet.

Man kann auch auf eine andere Weise zeigen, daß, wenn die Lage des beweglichen Anfangspunktes bestimmt ist, die Richtung der beweglichen Axen nur von drei Veränderlichen abhängt; denn die neun Kosinusse der Winkel, welche die beweglichen Axen mit den festen Axen bilden, sind durch sechs Bedingungsgleichungen miteinander verbunden (§. 28) und es bleiben folglich nur noch drei dieser Kosinusse zu bestimmen.

Da die Lage des Körpers also von sechs Veränderlichen abhängt; so sind zur vollständigen Kenntniß seiner Bewegung sechs Gleichungen erforderlich, welche die Werthe dieser sechs Veränderlichen als Funktionen der Zeit geben können. In der folgenden Untersuchung wollen wir der Kürze wegen x, y, z für x_1, y_1, z_1 setzen, indem sich diese Koordinaten auf ein festes Axensystem beziehen. Um die eben erwähnten sechs Gleichungen zu erhalten, wollen wir zunächst bemerken, daß man, wenn die innern Kräfte mit in Rechnung gebracht werden, so daß jedes Molekul als völlig frei betrachtet werden kann, wenn p das Gewicht irgend eines dieser Molekule, x, y, z seine Koordinaten in Beziehung auf feste Axen, F irgend eine der darauf wirkenden äußern, oder innern Kräfte α, β, γ die Winkel, welche die Richtung dieser Kraft mit den festen Axen bildet, und endlich u, v, w die Komponenten der Geschwindigkeit dieses Molekules nach diesen Axen bezeichnen, nach §. 17 setzen kann:

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} \frac{p}{g} \cdot \frac{du}{dt} = \Sigma F \cos\alpha, \\ \frac{p}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = \Sigma F \cos\beta, \\ \frac{p}{g} \cdot \frac{dw}{dt} = \Sigma F \cos\gamma. \end{cases}$$

Diese drei Gleichungen können durch eine einzige ersetzt werden, woraus sie sich einzeln wieder ableiten lassen, wenn man den Begriff der virtuellen Momente in Anwendung bringt. Man sieht leicht ein, daß das Molekul in irgend einer Richtung eine sehr kleine Verrückung δs erfahren kann, welche von der ganz unabhängig ist, die es bei der in Rede stehenden Bewegung wirklich erfährt. Man projicire alle Kräfte F, so wie ihre Resultante auf die Richtung von δs und multiplicire diese Projektionen durch das Element δs, d. h. man bilde die virtuellen Momente oder die Elemente der virtuellen Arbeit, welche der sehr kleinen Verrückung δs des Molekules entsprechen.

Bezeichnet man nun mit Φ die Beschleunigung:

$$\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{dw}{dt}\right)^2},$$

welche von der Kraft herrührt, die die ſtatt findende Bewegung allein hervorbringen würde, und welche wir die Totalkraft genannt haben, deren Komponenten nach den Axen folgende ſind:

$$\frac{p}{g}\frac{du}{dt},\quad \frac{p}{g}\frac{dv}{dt},\quad \frac{p}{g}\frac{dw}{dt};$$

ſo iſt die Reſultante der Kräfte F nichts anders, als dieſe Totalkraft, und wird durch das Produkt aus der Maſſe $\frac{p}{g}$ des Moleküles und aus dieſer Beſchleunigung Φ gemeſſen. Bezeichnet man folglich durch $(\widehat{\Phi\delta s})$ den Winkel, welchen die Beſchleunigung Φ oder die Totalkraft F mit der Richtung von δs bildet, und durch $(\widehat{F\delta s})$ den Winkel, welchen eine dieſer Kräfte F mit derſelben Richtung bildet; ſo hat man nach dem Principe der virtuellen Geſchwindigkeiten (§. 32):

$$\frac{p}{g}.\Phi\cos(\widehat{\Phi\delta s}).\delta s=\Sigma F\cos(\widehat{F\delta s}).\delta s.$$

welches die verlangte Gleichung iſt. Läßt man darin den gemeinſchaftlichen Faktor δs hinweg, und läßt dann die willkürliche Richtung von δs ſucceſſive mit jeder der Axen zuſammenfallen; ſo erhält man umgekehrt die drei Gleichungen (D).

Bildet man nun für jedes Molekül des Körpers eine ähnliche Gleichung, und addirt die entſprechenden Theile aller dieſer Gleichungen zuſammen, ſo erhält man:

$$\text{(E)}\qquad \Sigma\frac{p}{g}\Phi\cos(\widehat{\Phi\delta s}).\delta s=\Sigma F\cos(\widehat{F\delta s}).\delta s,$$

wo ſich das Zeichen Σ im zweiten Theile dieſer Gleichung jetzt nicht blos auf alle auf daſſelbe Molekül wirkenden Kräfte F, ſondern auch auf alle Moleküle des Körpers erſtreckt. Aus dieſer Gleichung wollen wir nun die zur vollſtändigen Beſtimmung der Bewegung des Körpers erforderlichen ſechs Gleichungen ableiten.

Zunächſt wollen wir bemerken, daß das Vorhergehende auf ein beliebiges Syſtem freier Moleküle anwendbar iſt, und daß aus dieſem Grunde die virtuellen Verrückungen δs völlig willkürlich geblieben ſind, und ganz unabhängig von einander ſein können. Aber wenn wir die Unterſuchung auf den Fall eines feſten Körpers beſchränken und zugleich annehmen wollen, daß die Verrückungen mit dem feſten Zuſtande des Körpers oder der Unverän-

derlichkeit der gegenseitigen Entfernungen seiner Molekule verträglich sind; so verschwinden alle den innern Wirkungen entsprechenden Elemente der virtuellen Arbeit (§. 34) und es bleiben nur die, welche sich auf die äußern Kräfte beziehen, und folglich ist das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten anwendbar, wenn man nur diese Kräfte betrachtet.

Aus der allgemeinen Gleichung (E) kann man eine sehr einfache specielle Gleichung ableiten, wenn man eine virtuelle Verrückung so annimmt, daß alle Molekule parallel zu einer beliebigen Axe, z. B. zu der Axe der x, um dieselbe unendlich kleine Größe vorrücken; denn da alsdann die Beschleunigung Φ auf die Axe der x projicirt wird, so ist ihre Projektion $= \frac{du}{dt}$, der Winkel $(\widehat{F\delta s}) = \alpha$, und wenn man den gemeinschaftlichen Faktor δs hinwegläßt; so kommt:

$$\Sigma \frac{p}{g} \cdot \frac{du}{dt} = \Sigma F \cos\alpha,$$

wo sich das Zeichen Σ im zweiten Theile dieser Gleichung auf alle auf dasselbe Molekul wirkende äußere Kräfte und auch auf alle Molekule erstreckt.

Verfährt man ebenso in Beziehung auf die beiden andern Axen, so erhält man die drei Gleichungen:

$$(F) \qquad \begin{cases} \Sigma \frac{p}{g} \cdot \frac{du}{dt} = \Sigma F \cos\alpha, \\ \Sigma \frac{p}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = \Sigma F \cos\beta, \\ \Sigma \frac{p}{g} \cdot \frac{dw}{dt} = \Sigma F \cos\gamma. \end{cases}$$

Man würde übrigens diese Gleichungen direkt erhalten haben, wenn man für jedes Molekul eine Reihe ähnlicher Gleichungen, wie die Gleichungen (D) gebildet und die korrespondirenden Theile derselben zusammenaddirt hätte. Wenn wir die Betrachtung virtueller Verrückungen eingemischt haben, so ist dieses lediglich deshalb geschehen, um auf einen zusammengesetzteren Fall, wo sie mit Vortheil angewandt werden kann, vorzubereiten.

Wenn man sich erinnert, daß die Kraft $\frac{p}{g} \cdot \Phi$, deren Componenten nach den Axen resp. folgende sind:

$$\frac{p}{g} \cdot \frac{du}{dt}, \frac{p}{g} \cdot \frac{dv}{dt}, \frac{p}{g} \cdot \frac{dw}{dt}$$

genau diejenige ist, welche wir früher die Totalkraft genannt haben; so kann man die vorhergehenden Gleichungen (F) in Worten ausdrücken, wenn man sagt: daß die Summen der Projektionen der äußern Kräfte auf drei rechtwinklige Axen den Summen der Projektionen der Totalkräfte auf dieselben Axen gleich sind.

Aus der Gleichung (E) kann man auch eine sehr einfache Gleichung ableiten, wenn man eine virtuelle Verrückung wählt, welche von einer unendlich kleinen Rotation um eine beliebige Axe, z. B. um die Axe der x, herrührt. Denn wenn $\delta\psi$ den unendlich kleinen Winkel bezeichnet, welchen das von einem beliebigen Molekule des Systemes auf die Rotationsaxe gefällte Perpendikel beschreibt, so hat man für das Element der virtuellen Arbeit der auf dieses Molekul wirkende Kraft F:

$$F\cos(\widehat{F\delta s}).r\delta\psi,$$

und die Gleichung (E) verwandelt sich in folgende:

$$\Sigma\frac{p}{g}.\Phi\cos(\widehat{\Phi\delta s}).r\delta\psi=\Sigma F\cos(\widehat{F\delta s}).r\delta\psi.$$

Da der Faktor $\delta\psi$ allen Gliedern gemeinschaftlich ist, weil die Bewegung die Drehung eines festen Körpers um eine Axe ist; so erhält man, wenn man diesen gemeinschaftlichen Faktor hinwegläßt:

$$\text{(G)}\qquad \Sigma\frac{p}{g}.\Phi\cos(\widehat{\Phi\delta s}).r=\Sigma F\cos(\widehat{F\delta s}).r.$$

Für die Rotationsbewegung um die beiden andern Axen erhielte man zwei Gleichungen von ähnlicher Form, die aber wirklich von einander verschieden sind, so daß man folglich die zur vollständigen Bestimmung der Bewegung des Körpers erforderlichen sechs Gleichungen hat.

Wenn eine Kraft in zwei andere, aufeinander senkrechte Kräfte zerlegt wird, wovon die eine in einer durch die Axe gelegten Ebene liegt, und die andere auf dieser Ebene senkrecht ist; so wird diese letztere durch $F\cos(\widehat{F\delta s})$ ausgedrückt, weil ihre Richtung die von δs ist. In der Mechanik nennt man aber das Produkt aus einer Kraft und aus ihrer Entfernung von einer Axe das Moment dieser Kraft in Beziehung auf diese Axe, und da die Richtung von δs, welche die der letzten Komponente ist, auf dem Halbmesser r senkrecht steht; so mißt dieser Halbmesser ihre Entfernung von der Rotationsaxe, welche auf dem Halbmesser r senkrecht ist, und folglich ist das Produkt

$F\cos(F\delta s).r$ das Moment der Kraft F in Beziehung auf die Rotationsaxe. Die drei Gleichungen von der Form (G) drücken also aus: daß die Summen der Momente der äußern Kräfte in Beziehung auf drei rechtwinklige Axen den Summen der Momente der Totalkräfte in Beziehung auf dieselben Axen gleich sind.

Zur Vollendung der Auflösung unserer Aufgabe hätten wir nun blos noch die Größen u, v, w, etc. als Funktionen der sechs Veränderlichen, wovon die Bewegung des Systemes abhängt, nämlich der Koordinaten des beweglichen Anfangspunktes und der drei Winkel ϑ, ε, χ, welche die Richtung der beweglichen Axen gegen die festen Axen bestimmen, auszudrücken, dann die sechs Differenzialgleichungen, welche man zwischen der Zeit und den Differenzialen dieser sechs Veränderlichen erhielte, zu integriren, und die willkürlichen Konstanten nach dem als bekannt vorausgesetzten anfänglichen Zustande der Bewegung zu bestimmen.

Da die in Rede stehenden sechs Veränderlichen also als Funktionen der Zeit durch ebensoviele verschiedene Gleichungen gegeben werden, so ist die Lage des Systemes jeden Augenblick vollständig bestimmt, woraus folgt, daß jede andere Gleichung, welche man durch eine neue Wahl virtueller Verrückungen aus der Gleichung (E) ableiten könnte, nothwendig auf eine der Gleichungen (F) und (G) zurückkommen, oder sich aus ihrer Verbindung ableiten lassen müßte.

§. 97. Die aus den Gleichungen (E) durch die Betrachtung einer virtuellen Rotationsbewegung abgeleiteten Gleichungen (G) lassen sich auch unter einer andern Form darstellen. Denn wir haben gesehen, daß man bei der Berechnung der Elemente der Arbeit für die Quantität Arbeit einer Resultante die Summe der Quantitäten Arbeit ihrer Komponenten setzen kann. Wenn also X, Y, Z die Komponenten der Kraft F nach den Axen und δx, δy, δz die von der betrachteten virtuellen Verrückung herrührenden unendlich kleinen Zunahmen der Koordinaten des Angriffspunktes der Kraft F bezeichnen, so sind $X\delta x$, $Y\delta y$, $Z\delta z$ die Elemente der Arbeit der drei Komponenten, und man hat:

$$F\cos(F\delta s)\,\delta s = X\delta y + Y\delta y + Z\delta z,$$

und da aus einem ähnlichen Grunde die Komponenten der Kraft $\frac{p}{g}\Phi$ folgende sind:

$$\frac{p}{g}\frac{du}{dt},\quad \frac{p}{g}\frac{dv}{dt},\quad \frac{p}{g}\frac{dw}{dt};$$

so hat man:

$$\frac{p}{g}.\Phi\cos(\Phi\delta s).\delta s=\frac{p}{g}.\frac{du}{dt}\delta x+\frac{p}{g}.\frac{dv}{dt}\delta y+\frac{p}{g}.\frac{dw}{dt}\delta z.$$

Wenn man zunächst die von einer Rotationsbewegung um die Axe der z herrührenden virtuellen Verrückungen betrachtet, $\delta\psi$ wieder den von dem auf der Axe senkrechten Radiusvektor r beschriebenen unendlich kleinen Winkel bezeichnet, und die Bewegung von der Axe der positiven x gegen die der positiven y statt findet; so hat man:

$$\delta z=0,\ \delta y=\delta s\,\frac{x}{r}=x\delta\psi,\ \delta x=-\delta s\,\frac{y}{r}=-y\delta\psi,$$

weil $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ die Kosinus der Winkel sind, welche der Radiusvektor r mit den Axen der x, y bildet, oder die Sinus der Winkel, welche derselbe Radiusvektor mit den Axen der y, x macht, und $\delta s=r\delta\psi$ ist.

Hiernach verwandelt sich die Gleichung (E) in folgende:

$$\text{(H)}\quad\begin{cases}\Sigma\frac{p}{g}\left(x\frac{dv}{dt}-y\frac{du}{dt}\right)=\Sigma(x\mathrm{Y}-y\mathrm{X}),\\ \text{und für die virtuellen Rotationsbewegungen um die beiden andern Axen fände man ebenso:}\\ \Sigma\frac{p}{g}\left(y\frac{dw}{dt}-z\frac{dv}{dt}\right)=\Sigma(y\mathrm{Z}-z\mathrm{Y}),\\ \Sigma\frac{p}{g}\left(z\frac{du}{dt}-x\frac{dw}{dt}\right)=\Sigma(z\mathrm{X}-x\mathrm{Z}).\end{cases}$$

Unter dieser Form pflegt man gewöhnlich die drei Gleichungen der Bewegung anzugeben, welche die Gleichheit zwischen den Summen der Momente der beiden betrachteten Arten von Kräften, nämlich der äußern und der Totalkräfte ausdrücken, welche jedem Punkte die Bewegung ertheilen können, die derselbe wirklich annimmt. Die Aufgabe ist durch das System der Gleichungen (F) und (H) vollständig gelöst, wenn man die Größen u, v, w, x, y, z, etc. als Funktionen der sechs Veränderlichen ausgedrückt hat, wovon die Lage des Systemes abhängt.

Princip über die Bewegung des Schwerpunktes eines festen Körpers.

§. 38. Unter dem Schwerpunkte eines Systemes materieller Punkte versteht man einen zwischen ihnen liegenden Punkt

von solcher Beschaffenheit, daß, wenn ξ, η, ζ die Koordinaten desselben und x, y, z die eines beliebigen materiellen Punktes des Systemes bezeichnen, man die Gleichungen hat:

$$(h) \qquad \xi = \frac{\Sigma px}{\Sigma p}, \quad \eta = \frac{\Sigma py}{\Sigma p}, \quad \zeta = \frac{\Sigma pz}{\Sigma p},$$

woraus folgt, wenn man die Nenner fortschafft, daß die Summe der Produkte, welche man erhält, wenn man das Gewicht eines jeden materiellen Punktes mit seiner Entfernung von einer der Koordinatenebenen multiplicirt, dem Produkte aus dem Totalgewichte des Systemes und der Entfernung des Schwerpunktes von derselben Ebene gleich ist.

Wenn man die Komponenten der Geschwindigkeit des Schwerpunktes, d. h. die Größen $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ resp. mit U, V, W bezeichnet; so man:

$$\mathrm{U} = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\Sigma p \frac{dx}{dt}}{\Sigma p} = \frac{\Sigma pu}{\Sigma p}, \text{ folglich } \frac{d\mathrm{U}}{dt}\Sigma p = \Sigma p \frac{du}{dt},$$

und:

$$\mathrm{V} = \frac{\Sigma pv}{\Sigma p}, \text{ folglich } \frac{d\mathrm{V}}{dt}\Sigma p = \Sigma p \frac{dv}{dt},$$

$$\mathrm{W} = \frac{\Sigma pw}{\Sigma p}, \text{ folglich } \frac{d\mathrm{W}}{dt}\Sigma p = \Sigma p \frac{dw}{dt},$$

und wenn man bemerkt, daß:

$$\mathrm{F}\cos\alpha = \mathrm{X}, \quad \mathrm{F}\cos\beta = \mathrm{Y}, \quad \mathrm{F}\cos\gamma = \mathrm{Z}$$

ist, so verwandeln sich die Gleichungen (F) in folgende:

$$(\mathrm{I}) \qquad \frac{d\mathrm{U}}{dt}\Sigma\frac{p}{g} = \Sigma\mathrm{X}, \quad \frac{d\mathrm{V}}{dt}\Sigma\frac{p}{g} = \Sigma\mathrm{Y}, \quad \frac{d\mathrm{W}}{dt}\Sigma\frac{p}{g} = \Sigma\mathrm{Z},$$

welche nur noch die drei Veränderlichen U, V, W, oder die Koordinaten ξ, η, ζ, wovon diese abhängen, enthalten und ausdrücken: daß sich der Schwerpunkt eines festen Körpers gerade wie ein einzelner materieller Punkt bewegt, dessen Gewicht dem Totalgewichte des Systemes oder Körpers gleich ist, und auf welchen alle parallel zu sich selbst in diesen Punkt verlegten auf den Körper wirkenden äußern Kräfte wirken; denn diese Gleichungen haben dieselbe Form, als die Gleichungen (D) für die Bewegung eines einzelnen materiellen Punktes.

Später werden wir sehen, daß dieser Satz nicht blos für die Bewegung eines einzelnen festen Körpers, sondern unter gewissen

Bedingungen der Freiheit der Bewegung im Allgemeinen auch für ein beliebiges System fester Körper gilt, und unter der Benennung: Princip der Bewegung des Schwerpunktes bekannt ist.

Aus diesem Principe folgt: daß, wenn der Schwerpunkt eine geradlinige und gleichförmige Bewegung hat, die äußern Kräfte den Bedingungen des Gleichgewichtes genügen müssen, und daß umgekehrt, wenn diese Bedingungen erfüllt werden, die Bewegung des Schwerpunktes geradlinig und gleichförmig ist. Denn im ersten Falle verschwinden bekanntlich die ersten Theile der Gleichungen (I), folglich auch die zweiten Theile derselben, und diese Gleichungen drücken alsdann aus, daß die parallel zu sich selbst in den Schwerpunkt verlegten äußern Kräfte eine Resultante $=0$ haben, oder daß diese in den Schwerpunkt verlegten Kräfte einander das Gleichgewicht halten. Im zweiten Falle werden bekanntlich die zweiten Theile der erwähnten Gleichungen $=0$, folglich auch die ersten Theile derselben, und mithin hat der Schwerpunkt eine geradlinige gleichförmige Bewegung.

Aus den Gleichungen (h), welche die Koordinaten ξ, η, ζ des Schwerpunktes bestimmen, erhellet, daß dieser Punkt in dem Körper eine feste oder unveränderliche Lage hat, und wenn man für einen gegebenen Augenblick die Lage und Geschwindigkeit dieses Punktes kennt; so geben die Gleichungen (I) diese Lage und Geschwindigkeit für einen beliebigen Augenblick. Zur vollständigen Bestimmung der Bewegung des festen Körpers hat man folglich blos noch die Rotationsbewegung desselben um seinen Schwerpunkt zu bestimmen, und obgleich wir hier nicht in alle Einzelnheiten der Auflösung dieser Aufgabe eingehen können; so wollen wir doch wenigstens die Möglichkeit dieser Auflösung zu zeigen suchen.

Zu dem Zwecke kann man zunächst die sich auf einen festen Anfangspunkt beziehenden Koordinaten x, y, z in andere Koordinaten x', y', z' verwandeln, welche sich auf den zum Anfangspunkte eines Systemes beweglicher zu den ersten paralleler Axen genommenen Schwerpunkt beziehen, und zu diesem Behufe $\xi+x'$, $\eta+y'$, $\zeta+z'$, resp. für x, y, z, so wie $U+u'$, $V+v'$, $W+w'$ resp. für u, v, w setzen, wo u', v', w' die Komponenten der Geschwindigkeit in Beziehung auf die beweglichen Axen nach diesen Axen bezeichnen.

Da der Schwerpunkt der Anfangspunkt der Koordinaten x', y', z' ist, so hat man nach den durch die Gleichungen (h) gegebenen Werthen von ξ, η, ζ:

$$\Sigma px'=0,\quad \Sigma py'=0,\quad \Sigma pz'=0,$$

und mithin, wenn man in Beziehung auf die Zeit differenzirt:

$$\Sigma pu'=0,\quad \Sigma pv'=0,\quad \Sigma pw'=0,$$

folglich:

$$\Sigma p \frac{du'}{dt} = 0, \quad \Sigma p \frac{dv'}{dt} = 0, \quad \Sigma p \frac{dw'}{dt} = 0.$$

Vermittelst dieser Relationen und der Gleichungen (I) reduciren sich die Gleichungen (H) auf:

$$(J) \qquad \begin{cases} \Sigma \frac{p}{g} \left(x' \frac{dv'}{dt} - y' \frac{du'}{dt} \right) = \Sigma (x'Y - y'X), \\ \Sigma \frac{p}{g} \left(y' \frac{dw'}{dt} - z' \frac{dv'}{dt} \right) = \Sigma (y'Z - z'Y), \\ \Sigma \frac{p}{g} \left(z' \frac{du'}{dt} - x' \frac{dw}{dt} \right) = \Sigma (z'X - x'Z). \end{cases}$$

Da diese Gleichungen keine Veränderlichen enthalten, welche sich auf den Schwerpunkt beziehen, sondern blos solche Veränderliche, die sich auf die durch den Schwerpunkt gehenden beweglichen Axen beziehen; so folgt daraus: daß die Bewegung des Körpers um seinen Schwerpunkt eben so bestimmt wird, wie wenn dieser Schwerpunkt fest wäre.

In diesen letzten Gleichungen müßte man nun alle Veränderliche, deren Anzahl das Dreifache der Anzahl der Molekule ist, durch drei unabhängige Größen ausdrücken, welche die Lage des Körpers bestimmen, wie z. B. die drei schon erwähnten Winkel ϑ, ε, χ. Da aber diese Analyse etwas komplicirt ist, so wollen wir hier nicht weiter darauf eingehen, zumal da es für uns in der Folge genügt, gezeigt zu haben, daß die Bewegung des Körpers davon abhängt, wermittelst der sechs Gleichungen (I) und (J) sechs Veränderliche als Funktionen der Zeit zu bestimmen.

Zum Schluss wollen wir noch bemerken, daß die durch die Gleichungen (J) ausgedrückte Rotationsbewegung des Körpers um seinen Schwerpunkt nicht geändert würde, wenn man in das System der Kräfte noch andere durch diesen Schwerpunkt gehende Kräfte einführte. Dieses folgt aus der Form der zweiten Theile dieser Gleichungen, und daraus, daß die Koordinaten des Schwerpunktes, auf welchen die neuen Kräfte nach der Voraussetzung wirken sollen, in Beziehung auf die Axen der x', y', z' Null sind. Hieraus folgt ferner, daß die relative Rotationsbewegung um den Schwerpunkt nicht geändert würde, wenn man auf diesen Schwerpunkt Kräfte wirken ließe, wodurch derselbe im Zustande der Ruhe erhalten würde.

Gleichgewicht und Aequivalenz der auf einen festen Körper wirkenden Kräfte.

§. 39. Man sagt: daß die auf einen festen Körper wirkenden Kräfte im Gleichgewichte sind, wenn sie diesem als ruhend vorausgesetzten Körper weder irgend eine Bewegung ertheilen, noch, wenn er sich bereits bewegt, diese Bewegung verändern können.

Wir wollen den allgemeinsten Fall betrachten, wo der Körper bereits eine gewisse Bewegung hat, und annehmen, daß an demselben ein neues System von Kräften angebracht werde. Es bezeichne $\mathbf{F}_1$ irgend eine dieser neuen Kräfte und X_1, Y_1, Z_1 seien die Komponenten derselben nach den Axen; so müssen diese Kräfte in die zweiten Theile der Gleichungen (F) und (H) oder (J) eingeführt werden, welche alsdann die Bewegung des Körpers unter der Wirkung der ursprünglichen Kräfte und der neuen eingeführten Kräfte $\mathbf{F}_1$ ausdrücken. Soll nun diese Bewegung mit der ursprünglichen identisch sein, d. h. sollen die Kräfte $\mathbf{F}_1$ im Gleichgewichte sein; so ist erforderlich, aber auch hinreichend, daß die sich auf diese Kräfte beziehenden Summen in den zweiten Theilen der angeführten Gleichungen von selbst verschwinden, wodurch man die folgenden sechs Bedingungsgleichungen erhält:

$$\Sigma X_1 = 0, \quad \Sigma Y_1 = 0, \quad \Sigma Z_1 = 0,$$

$$\Sigma(xY_1 - yX_1) = 0, \quad \Sigma(yZ_1 - zY_1) = 0, \quad \Sigma(zX_1 - xZ_1) = 0,$$

welche für das Gleichgewicht der Kräfte $\mathbf{F}_1$ nothwendig, aber auch hinreichend sind. Die Indices kann man der Kürze wegen hinweglassen, und alsdann hat man für das Gleichgewicht eines beliebigen auf einen festen Körper wirkenden Systemes von Kräften $\mathbf{F}$ die sechs Relationen:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0,$$

$$\Sigma(xY - yX) = 0, \quad \Sigma(yZ - zY) = 0, \quad \Sigma(zX - xZ) = 0.$$

Die drei ersten drücken aus: daß die Summen der Komponenten nach drei beliebigen rechtwinkligen Axen Null sind, wo die nach einem bestimmten Sinne, z. B. nach dem der positiven Koordinaten, gerichteten Komponenten als positiv und die nach dem entgegengesetzten Sinne gerichteten als negativ betrachtet werden.

Um die drei letzten der vorhergehenden Gleichungen auf eine einfache Weise ausdrücken zu können, bemerke man zunächst, daß der Anfangspunkt der Koordinaten x, y, z ganz beliebig ist, und wenn man ferner mit $\mathbf{F}'$ die Projektion der Kraft $\mathbf{F}$ auf die Ebene der xy, mit r' die Entfernung des Anfangspunktes von dieser

Projektion und mit α den Winkel bezeichnet, welchen diese Projektion mit der Axe der x bildet; so hat man:

$$X = F' \cos\alpha, \quad Y = -F' \sin\alpha, \quad x = r' \sin\alpha, \quad y = r' \cos\alpha,$$

woraus sich leicht ergibt:

$$yX - xY = F'r';$$

Nun ist aber $F'r'$ das Moment der Kraft F in Beziehung auf die Axe der z, und ist in der That gleich dem Produkte aus der Entfernung r' der Axe der z von dem Angriffspunkte der Kraft F und aus der Komponente, welche auf der durch diese Axe und durch diesen Angriffspunkt gehenden Ebene normal ist. Wir haben aber bereits in §. 36 bemerkt, daß dieses letzte Produkt das Moment der Kraft F in Beziehung auf die Axe der z genannt wird, und ebenso sind die Größen $yZ - zY$, $zX - xZ$, mit dem gehörigen Zeichen genommen, resp. die Momente der Kraft F in Beziehung auf die Axe der x und der y. Die drei in Rede stehenden Gleichungen drücken also aus: daß für den Fall des Gleichgewichtes die Summen der Momente der Kräfte in Beziehung auf drei beliebige rechtwinklige Axen gleich Null sind, wo diese Momente als positiv angesehen werden, wenn die betrachtete Kraft den Körper um die Axe, worauf sich diese Momente beziehen, nach einem bestimmten Sinne zu drehen strebt, und als negativ, wenn sie eine Drehung in dem entgegengesetzten Sinne zu bewirken sucht.

§. 40. Man sagt: daß zwei, successive auf denselben Körper wirkende Systeme von Kräften äquivalent oder gleichbedeutend sind, wenn sie diesem Körper dieselbe Bewegung ertheilen, oder ertheilen können. Die Bedingungen aber, welche erforderlich und zureichend sind, damit die Bewegung dieselbe sei, bestehen darin, daß die zweiten Theile der Gleichungen (J) und (H), welche die Bewegung des Körpers bestimmen, in beiden Fällen einander gleich sind. Wenn X, Y, Z die Komponenten irgend einer der Kräfte des ersten Systemes und X', Y', Z' die Komponenten irgend einer der Kräfte des zweiten Systemes bezeichnen, deren Angriffspunkt die Koordinaten x', y', z' hat; so hat man folglich die Relationen:

$$\Sigma X = \Sigma X', \quad \Sigma Y = \Sigma Y', \quad \Sigma Z = \Sigma Z',$$

$$\Sigma(xY - yX) = \Sigma(x'Y' - z'X'), \quad \Sigma(yZ - zY) = \Sigma(y'Z' - z'Y'),$$

$$\Sigma(zX - xZ) = \Sigma(X'y' - x'Z').$$

Aus den drei ersten dieser Gleichungen folgt, daß die alge-

braiſchen Summen der Komponenten nach den Axen in beiden Syſtemen gleich ſind, und aus den drei letzten Gleichungen erhellet, daß die Summe der Momente der Kräfte beider Syſteme in Beziehung auf drei rechtwinklige Axen ebenfalls einander gleich ſind.

Da die ſechs Gleichungen für die Bewegung eines feſten Körpers durch die Betrachtung der virtuellen Geſchwindigkeiten erhalten ſind, ſo iſt klar, daß man durch daſſelbe Verfahren auch die Gleichungen des Gleichgewichtes oder der Aequivalenz der Kräfte direkt hätte erhalten können.

Wenn man z. B. auf dieſe Weiſe die Gleichungen für das Gleichgewicht ableiten will, ſo geht man von der allgemeinen Gleichung (E) in §. 36 aus, welche ſich auf das Gleichgewicht eines Molekules bezieht, und ausdrückt, daß die Summe der Elemente der virtuellen Arbeit, oder der virtuellen Momente der auf dieſes Molekul wirkenden Kräfte gleich Null iſt, bildet für alle Molekule eine Reihe ähnlicher Gleichungen, deren entſprechende Theile man zuſammenaddirt, beſchränkt die virtuellen Bewegungen auf die mit dem feſten Zuſtande des betrachteten Körpers verträglichen, wodurch die den Molekularkräften entſprechenden Arbeitselemente von ſelbſt verſchwinden, ſo daß nur die den äußern Kräften entſprechenden übrig bleiben, und endlich nimmt man von den virtuellen Bewegungen, welche der feſte Körper annehmen kann, die drei zu den Axen parallelen unendlich kleinen fortſchreitenden Bewegungen und die drei um dieſe Axen ſtattfindenden Rotationsbewegungen; ſo gelangt man zu den weiter oben gefundenen ſechs Gleichungen.

Wenn man durch daſſelbe Verfahren die Gleichungen der Aequivalenz erhalten wollte, ſo müßte man vorher aus der Gleichung (E) eine allgemeine Bedingung der Aequivalenz zwiſchen zwei auf daſſelbe Molekul wirkenden Syſtemen von Kräften ableiten, und dann mit der ſo transformirten Gleichung eben ſo operiren, um die ſechs Gleichungen der Aequivalenz zu erhalten, wie man mit der Gleichung (E) operiren würde, um die ſechs Gleichungen des Gleichgewichtes zu erhalten.

Reſultante eines Syſtemes paralleler Kräfte. — Mittelpunkt paralleler Kräfte. — Schwerpunkt.

§. 41. Sehr oft hat man ein auf einen feſten Körper wirkendes Syſtem *paralleler Kräfte* zu betrachten, und die Richtung ſowohl, als die Größe einer einzigen Kraft zu beſtimmen, welche mit dieſem Syſteme von Kräften aequivalent oder gleichbedeutend iſt.

Es ſei **P** irgend eine der parallelen Kräfte und **R** die *eine* Kraft, welche dem Syſteme der Kräfte **P** aequivalent iſt, und deshalb ihre *Reſultante* genannt wird. Ferner ſeien α, β, γ die Winkel,

welche die gemeinschaftliche Richtung dieser Kräfte P mit drei rechtwinkligen Axen bildet, und a, b, c seien die Winkel, welche die Resultante R mit denselben Axen bildet; so geben die drei ersten Gleichungen der Aequivalenz:

$$R\cos a = \Sigma P\cos\alpha,\quad R\cos b = \Sigma P\cos\beta,\quad R\cos c = \Sigma P\cos\gamma.$$

Im Allgemeinen wirken mehrere der Kräfte P nach einem gewissen Sinne und die andere im entgegengesetzten Sinne. Wir wollen annehmen, daß sich die Winkel α, β, γ auf die Kräfte beziehen, welche die größte Summe bilden, so muß man für diese $\cos.\alpha$, $\cos\beta$, $\cos.\gamma$ und für die anderen Kräfte dagegen $-\cos.\alpha$, $-\cos.\beta$, $-\cos.\gamma$ nehmen; aber da der absolute Werth dieser Kosinusse für beide Kategorien von Kräften derselbe ist, so kann man $\cos.\alpha$, $\cos\beta$, $\cos.\gamma$ aus dem Summenzeichen Σ herausſetzen, und die der Kräfte P, welche in dem Sinne der größten Summen wirken, als positiv, dagegen die in dem entgegengesetzten Sinne wirkenden als negativ betrachten. Man hat folglich:

$$R\cos a = \cos\alpha\Sigma P,\quad R\cos b = \cos\beta\Sigma P,\quad R\cos c = \cos\gamma\Sigma P,$$

und wenn man zum Quadrate erhebt, und die Resultate zusammenaddirt, so kommt:

$$R^2 = (\Sigma P)^2 \text{ folglich } R = \Sigma P,$$

weil die durch die Erhebung zum Quadrate eingeführte negative Auflösung unzulässig ist. Alsdann findet man:

$$\cos a = \cos\alpha,\quad \cos b = \cos\beta,\quad \cos c = \cos\gamma,$$

d. h. die Resultante R bildet mit den Axen dieselben Winkel, als die Kräfte P, ist folglich zu ihnen parallel, ferner ihrer algebraischen Summe gleich, und wirkt nach dem Sinne derer, deren absolute Summe am größten ist.

Es seien ξ, η, ζ die Koordinaten eines beliebigen, auf der Richtung der Resultante genommenen Punktes, so geben die drei letzten Bedingungen der Aequivalenz:

$$(\xi R\cos b - \eta R\cos a) = \Sigma(xP\cos\beta - yP\cos\alpha),$$
$$(\eta R\cos c - \zeta R\cos b) = \Sigma(yP\cos\gamma - zP\cos\beta),$$
$$(\zeta R\cos a - \xi R\cos c) = \Sigma(zP\cos\alpha - xP\cos\gamma).$$

oder vielmehr:

$$R(\xi\cos b - \eta\cos a) = \cos\beta\Sigma Px - \cos\alpha\Sigma Py,$$
$$R(\eta\cos c - \zeta\cos b) = \cos\gamma\Sigma Py - \cos\beta\Sigma Pz,$$
$$R(\zeta\cos a - \xi\cos c) = \cos\alpha\Sigma Pz - \cos\gamma\Sigma Px.$$

Von diesen drei Gleichungen sind nur zwei von einander unabhängig, und es läßt sich z. B. die dritte aus den beiden andern ableiten, wenn man die erste mit cos. c oder cos. γ, die zweite mit cos. a oder cos. α multiplicirt, die Produkte zusammenaddirt und dann die resultirende Gleichung durch cos b oder cos β dividirt. Soll folglich die Kraft R, deren Intensität und Richtung vorhin bestimmt ist, dem Systeme der Kräfte P völlig äquivalent sein; so genügt es, daß sie durch einen Punkt geht, dessen Koordinaten zweien der drei letzten Gleichungen genügen.

Diesen Gleichungen wird aber genügt, wenn man die Relationen hat:

$$R\xi = \Sigma Px, \quad R\eta = \Sigma Py, \quad R\zeta = \Sigma Pz,$$

und zwar, welche gemeinschaftliche Richtung die Kräfte P und R auch haben mögen. Der Punkt, dessen Koordinaten ξ, η, ζ durch diese Gleichungen bestimmt werden, hat folglich die merkwürdige Eigenschaft, daß die Resultante der Kräfte P immer durch diesen Punkt geht, wenn auch diese Kräfte bei denselben Intensitäten und denselben Angriffspunkten ihre Richtung beliebig ändern, indem sie jedoch parallel unter sich bleiben, weshalb man diesen Punkt den Mittelpunkt der parallelen Kräfte nennt.

Wenn die Kräfte P die Gewichte der Molekule des Körpers sind, so wird der Mittelpunkt der parallelen Kräfte der Schwerpunkt des Körpers genannt. Dieser Punkt, dessen Koordinaten durch die Formeln:

$$\xi = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}, \quad \eta = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P}, \quad \zeta = \frac{\Sigma Pz}{\Sigma P}$$

bestimmt werden, weil $R = \Sigma P$ ist, hat die Eigenschaft, daß die Resultante der Gewichte der Molekule des Körpers immer durch denselben gehen muß, wenn sich die Richtung dieser Gewichtskräfte gegen den Körper, oder was dasselbe ist, wenn sich die Lage des Körpers gegen die vertikale Richtung, welche zugleich die der Schwere ist, ändert. Durch diese Formeln wird die Definition des Schwerpunktes gerechtfertigt, welche wir bereits früher davon gegeben haben, als wir denselben blos als einen geometrischen Punkt betrachteten, dessen Lage durch die obigen Formeln bestimmt wurde.

Die Summen ΣPx, ΣPy, ΣPz, welche die Zähler der Werthe von ξ, η, ζ bilden, werden die Summen der Momente der Gewichte der Molekule des Körpers in Beziehung auf die Ebenen der yz, xz, xy genannt.

Wenn der betrachtete Körper in allen seinen Theilen homogen ist, und folglich die Gewichte seiner Elemente ihrem Volumen proportional sind; so kann man, wenn V das gesammte Volumen des Körpers und dv ein unendlich kleines Element dieses Volumens bezeichnet, setzen:

$$\xi = \frac{\Sigma x dv}{V}, \quad \eta = \frac{\Sigma y dv}{V}, \quad \zeta = \frac{\Sigma z dv}{V},$$

wo die Summen $\Sigma x dv$, $\Sigma y dv$, $\Sigma z dv$ die Summen der Momente der Volumenelemente in Beziehung auf die Ebenen der yz, der xz und der xy genannt werden.

Um die Summation verrichten zu können, muß man im Allgemeinen $dxdydz$ für dv und das Zeichen der dreifachen Integration in Beziehung auf die drei Veränderlichen x, y, z für das Summenzeichen Σ setzen. Aber wenn man annimmt, daß in jeder der vorhergehenden Formeln die beiden ersten Integrationen verrichtet sind, und man bezeichnet mit U_x, U_y, U_z die Flächen der Durchschnitte des Körpers mit Ebenen, welche resp. auf den Axen der x, der y, der z senkrecht und um die Längen x, y, z vom Anfangspunkte entfernt sind; so hat man:

$$\xi = \frac{\int_{x_0}^{X} U_x x dx}{V}, \quad \eta = \frac{\int_{y_0}^{Y} U_y y dy}{V}, \quad \zeta = \frac{\int_{z_0}^{Z} U_z z dz}{V},$$

wo die Integrationsgrenzen x_0 und X, y_0 und Y, z_0 und Z die Koordinaten oder die Entfernungen der den Körper begrenzenden Ebenen vom Anfangspunkte sind. Man darf hierbei jedoch nicht vergessen, daß die Koordinaten x, y, z in diesen Formeln mit dem entsprechenden Zeichen genommen werden müssen, und wenn z. B. die Ebene der yz den Körper in zwei Theile theilt; so ist z für den obern Theil dieser Ebene positiv und für den untern Theil derselben negativ. Hieraus folgt, daß, wenn die Ebene der yz den Körper in zwei symmetrische Theile theilt, die Elemente $U_x dx$ paarweise einander gleich und von entgegengesetztem Zeichen sind, so daß das Integral $\int_{x_0}^{X} U_x dx$, und folglich ξ sich auf Null reducirt; d. h. in diesem Falle liegt der Schwerpunkt in der Ebene der yz. So oft also eine Ebene den Körper in zwei symmetrische Theile theilt, liegt sein Schwerpunkt in dieser Ebene; denn man könnte alsdann diese Ebene zu einer der Koordinatenebenen nehmen, und die obigen Schlüsse wiederholen. Wenn man drei verschiedene Ebenen kennt, wovon jede den Körper in zwei symmetrische Theile theilt, so muß der Schwerpunkt desselben auf jeder derselben, und folglich in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte liegen.

Oft hat man Körper zu betrachten, welche zwischen zwei sehr wenig von einander entfernten parallelen Ebenen liegen, und sehr dünne Platten oder Scheiben bilden, welche man bei der Bestimmung ihres Schwerpunktes als nur zwei Dimensionen habend betrachtet. Nimmt man z. B. die ebene Fläche eines solchen sehr dünnen Körpers zu der Ebene der xy, so hat man blos:

$$\xi = \frac{\int_{x_0}^{X} U_x x dx}{V}, \quad \eta = \frac{\int_{y_0}^{Y} U_y y dy}{V},$$

wo V die Größe dieser ebenen Fläche, U_x, U_y die Längen der linearen Durchschnitte derselben mit Ebenen, welche in den Entfernungen x, y vom Anfangspunkte auf den Axen der x, y senkrecht sind, bezeichnen, und x_0, X und y_0, Y die Entfernungen der Parallelen zu den Axen, welche die ebene Fläche des Körpers begrenzen, vom Anfangspunkte sind.

Bewegung eines beliebigen Systemes fester Körper oder einer beliebigen Maschine.

§. 42. Im Allgemeinen versteht man unter dem Ausdrucke Maschine ein System einander berührender fester Körper, welches zur Uebertragung oder Fortpflanzung der Arbeit gewisser Kräfte bestimmt ist. Zur Rechtfertigung oder Erläuterung dieser Definition ist es nothwendig, die Gleichung der lebendigen Kräfte, welche das Princip der Uebertragung oder Fortpflanzung der Arbeit enthält, auf ein System einander gegenseitig berührender Körper zu erstrecken. Wenn man einen der Körper betrachtet, woraus die Maschine besteht, so hat man nach §. 35:

$$\Sigma p \frac{\omega^2}{2g} - \Sigma p \frac{\omega_0^2}{2g} = \Sigma \int P ds - \Sigma \int P' ds',$$

wo der erste Theil dieser Gleichung den Zuwachs der Summe der lebendigen Kräfte aller Molekule dieses Körpers ausdrückt, während die im zweiten Theile derselben vorkommenden Kräfte nur äußere sind, wenn jedoch bei der Bewegung des Körpers die gegenseitigen Entfernungen seiner Molekule nicht geändert werden, wie wir hier voraussetzen.

Wenn man für alle Körper, woraus die Maschine besteht, ähnliche Gleichungen, wie die vorhergehende bildet und die entsprechenden Theile aller dieser Gleichungen zusammenaddirt; so drückt der erste Theil der resultirenden Gleichung den Zuwachs der Summe der lebendigen Kräfte aller Molekule der Maschine aus, und der zweite Theil dieser Gleichung ist die Summe der

Quantitäten Arbeit aller äußern auf die Maſchine wirkenden Kräfte.

Dieſe Summe läßt ſich reduciren, wenn man annimmt, daß das Syſtem der Körper wirklich eine Maſchine bildet, d. h. daß dieſe Körper miteinander in Berührung bleiben, indem ſie während der Bewegung gegenſeitig auf einander einwirken. Denn die gegenſeitige Einwirkung zweier einander berührender Körper rührt von den Attraktionen, oder Repulſionen der Molekule des einen Körpers auf die des andern her, wenn ſie einander ſo nahe ſind, daß ſie auf einander wirken können.

Wir wollen zwei dieſer Molekule m und m' betrachten, welche zwei verſchiedenen einander berührenden Körpern angehören; es bezeichne r ihre gegenſeitige Entfernung, $\mathbf{R}$ ihre gegenſeitige Einwirkung auf einander, dr die Veränderung ihrer gegenſeitigen Entfernung in der unendlich kleinen Zeit dt und ds das Wegelement, welches eins dieſer Molekule, z. B. m, während derſelben Zeit im Raume beſchreibt; ſo iſt das Arbeitselement von $\mathbf{R}$ in Beziehung auf die Bewegung von m im Raume $= \mathbf{R}ds.\cos(\widehat{\mathbf{R}ds})$ und das Arbeitselement in Beziehung auf die Veränderung der gegenſeitigen Entfernung der beiden Molekule $= \mathbf{R}dr$. Am Ende der ganzen Zeit, während welcher die gegenſeitige Einwirkung dieſer Molekule ſtatt findet, iſt die Geſammtarbeit von $\mathbf{R}$ in Beziehung auf die Bewegung von m im Raume $= \int \mathbf{R}ds.\cos(\widehat{\mathbf{R}ds})$ und die der Veränderung der gegenſeitigen Entfernung der beiden Molekule entſprechende Totalquantität Arbeit iſt $= \int \mathbf{R}dr$. Aber wenn man beachtet, was während dieſer Zeit ſtatt findet, ſo ſieht man, daß die gegenſeitige Entfernung r ſucceſſive immer mehr abnimmt, bis ſie ein gewiſſes Minimum erreicht, worauf ſie wieder zunimmt, und die Kraft $\mathbf{R}$ hat gewöhnlich nur in der Nähe dieſes Minimums, d. h. wenn dr ſehr klein iſt, einen merklichen Werth. Hieraus folgt, daß das Integral $\int \mathbf{R}dr$ im Allgemeinen gegen das Integral $\int \mathbf{R}ds.\cos(\widehat{\mathbf{R}ds})$ ſehr klein iſt, und wenn man dieſe Bemerkung auf alle gegenſeitig auf einander einwirkende Molekule erſtreckt; ſo ſieht man, daß die von den gegenſeitigen Einwirkungen der Molekule in der Nähe des Berührungspunktes herrührende Quantität Arbeit gewöhnlich gegen die Arbeit der äußern Kräfte, welche auf denſelben Körper vermöge ſeiner Berührung mit andern Körpern, oder ähnlicher Wirkungen, wie die Gewichte der Molekule wirken, ſehr klein iſt. Das Integral $\int \mathbf{R}dr$ iſt in aller Strenge $= 0$, wenn die Kraft $\mathbf{R}$ nur eine Funktion der Entfernung r iſt; denn alsdann beſteht dies Integral aus Elementen, welche paarweiſe einander gleich und von entgegengeſetztem Zeichen ſind. Obgleich man allen Grund zu der Annahme hat, daß ſich die Sache ſo verhält, und die Kräfte $\mathbf{R}$ dieſelben bleiben, wenn die Entfernungen wieder dieſel-

ben werden; so ist der Hergang der Erscheinung doch nicht so, wie wenn dieses statt fände. Aber wir werden später sehen, daß der Grund hiervon in der unrichtigen Voraussetzung liegt, daß die gegenseitigen Entfernungen der Molekule desselben Körpers in der Nähe der Berührungspunkte ungeändert bleiben.

Wir werden auf die Bestimmung der durch $\int R dr$ ausgedrückten Quantitäten Arbeit später wieder zurückkommen, wenn wir die Erschütterungen der Molekule desselben Körpers in Betracht ziehen, und bei der gegenwärtigen Untersuchung, welche mehr theoretisch, als physisch ist, wollen wir annehmen, daß die Kraft F nur dann einen merklichen Werth hat, wenn nahezu $dr = 0$ ist, und folglich die den gegenseitigen Einwirkungen der Molekule entsprechende Quantität Arbeit verschwindet. Diese Voraussetzung nähert sich übrigens der Wirklichkeit um so mehr, je weniger die einander berührenden Körper in der Nähe des Berührungspunktes erschüttert werden, oder ihre Form verändern, d. h. je härter und je besser polirt sie sind, weil, wie die Erfahrung lehrt, in diesem Falle die Folgerungen aus unserer Hypothese sich der Wahrheit mehr nähern.

Es ist also das Arbeitselement $R ds . \cos(\widehat{R ds})$ für ein Molekul m, auf welches ein Molekul m' des berührenden Körpers die Wirkung R ausübt, gleich dem Arbeitselemente $R ds' . \cos(\widehat{R ds'})$ für das Molekul m', auf welches das Molekul m die gleiche und entgegengesetzte Wirkung R ausübt, da die Summe dieser beiden Arbeitselemente gleich Null sein muß, oder die Entfernung r in dem Augenblicke, wo sie ihr Minimum erreicht, sich nicht merklich ändert. Hieraus folgt, daß die äußere Arbeit, welche jeder Körper der Maschine durch seine Berührung mit einem andern erhält, der gleich ist, welche er selbst diesem andern Körper durch die Berührung mittheilt; nur haben diese beiden Quantitäten Arbeit entgegengesetzte Zeichen. Hieraus sieht man, daß man für die Widerstandsarbeit, welche in einer Maschine durch die Wirkung äußerer Körper erzeugt wird, die Bewegungsarbeit substituiren kann, welche diese Körper durch ihre Berührung mit der Maschine erhalten. Man kann also die Gleichung der lebendigen Kräfte oder der Uebertragung der Arbeit für eine aus festen Körpern bestehende Maschine, worin die Widerstandskräfte blos von der Wirkung der einander berührenden Körper herrühren und worin von den Molekularwirkungen, und folglich auch von den Reibungen in den Berührungspunkten abstrahirt wird, folgendermaßen ausdrücken:

In jeder in Bewegung befindlichen Maschine ist die Differenz zwischen der Bewegungsarbeit der äußern Kräfte während einer gewissen Zeit und der während derselben Zeit auf äußere Körper übertragenen Bewegungsarbeit dem Zuwachse der lebendi-

gen Kräfte der Körper gleich, woraus die Maschine besteht.

Auf die Folgerungen, welche sich aus diesem Satze ergeben, werden wir später wieder zurückkommen, wenn wir gezeigt haben werden, wie sich derselbe auf Körper anwenden läßt, deren Molekule erschüttert werden können.

§. 43. Wenn man von der Molekulararbeit abstrahirt, welche durch die Berührung der verschiedenen die Maschine bildenden Körper entsteht, so ist schon die Gleichung der lebendigen Kräfte zur Bestimmung der Bewegung hinreichend, welche diese Maschine unter der Wirkung gegebener äußerer Kräfte annimmt, wofern jedoch diese Bewegung nur von einer einzigen Art sein kann, d. h. wofern die gegenseitige Lage der verschiedenen Bestandtheile der Maschine nur von der Bestimmung einer einzigen Veränderlichen als Funktion der Zeit abhängt.

Bewegung des Pendels.

Um ein Beispiel zu geben, wollen wir annehmen, daß die Rotationsbewegung eines schweren Körpers bestimmt werden solle, welcher sich um eine feste horizontale Axe drehen muß, die in einem Cylinder oder einer Welle besteht, deren Enden in zwei kreisförmigen Lagern ruhen. Es bezeichne ϑ den Winkel, welchen eine durch die Drehungsaxe gehende feste Vertikalebene mit einer durch diese Axe und durch den Schwerpunkt des Körpers gelegten und mit diesem Körper beweglichen Ebene bildet, r die Entfernung eines Molekules des Körpers von der Drehungsaxe, p das Gewicht dieses Molekules und φ die Winkelgeschwindigkeit, deren anfänglicher Werth φ_0 ist; so ist die wirkliche Geschwindigkeit des betrachteten Molekules $= \varphi r$, und die Gleichung der lebendigen Kräfte verwandelt sich in folgende:

$$\Sigma \frac{p}{g} \frac{\varphi^2 r^2}{2} - \Sigma \frac{p}{g} \frac{\varphi_0^2 r^2}{2} = \int \mathrm{P} ds - \int \mathrm{P}' ds',$$

deren zweiter Theil dieselbe Bedeutung hat, wie früher. Der Faktor φ^2 ist allen Gliedern der ersten Summe Σ und der Faktor φ_0^2 allen Gliedern der zweiten Summe gemeinschaftlich, und wenn man für φ seinen Werth $\frac{d\vartheta}{dt}$ setzt; so erhält man:

$$\left[\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - \varphi_0^2\right] \Sigma \frac{pr^2}{2g} = \int \mathrm{P} ds - \int \mathrm{P}' ds',$$

wo sich der zweite Theil dieser Gleichung als Funktion des Winkels ϑ berechnen läßt, und wenn man folglich diesen zweiten Theil mit $f(\vartheta)$ bezeichnet; so ergibt sich aus der vorhergehenden Gleichung:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{\varphi_0^2 + \frac{f(\vartheta)}{\Sigma \frac{pr^2}{2g}}},$$

woraus folgt:

$$t = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{-d\vartheta}{\sqrt{\varphi^{02} + \frac{f(\vartheta)}{\Sigma \frac{pr^2}{2g}}}}.$$

Wir wollen annehmen, daß auf den Körper keine andern Kräfte, als die Gewichte seiner Molekule wirken, und daß die Drehungsaxe horizontal ist; so haben wir, wenn ρ die Entfernung des Schwerpunktes des Körpers von der Drehungsaxe und Π das Totalgewicht bezeichnet:

$$\int P ds - \int P' ds' = \Pi\rho\,(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0),$$

wo ϑ_0 den Werth des Winkels ϑ im Anfange der Bewegung oder in dem Augenblicke, wo die Geschwindigkeit Null ist, bezeichnet. Alsdann ist zu gleicher Zeit $\varphi_0 = 0$, $\vartheta = \vartheta_0$, und die obige Gleichung verwandelt sich in folgende:

$$t = \frac{\Sigma \frac{pr^2}{2g}}{\sqrt{\Pi\rho}} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{-d\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0}}.$$

Wenn man die seit dem Beginnen der Bewegung bis zu dem Augenblicke, wo der Schwerpunkt des Körpers in der durch die Drehungsaxe gehenden Vertikalebene liegt, verflossene Zeit haben will; so muß man $\vartheta = 0$ setzen, und alsdann erhält man:

$$t = \frac{\sqrt{\Sigma \frac{pr^2}{2g}}}{\sqrt{\Pi\rho}} \int_0^{\vartheta} \frac{+d\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0}}.$$

Wenn der Winkel ϑ sehr klein ist, so kann man $\frac{\vartheta_0^2 - \vartheta^2}{2}$ für $\cos\vartheta - \cos\vartheta_0$ setzen, und alsdann hat man:

$$t = \sqrt{\frac{\Sigma pr^2}{g\Pi\rho}} \cdot \frac{\pi}{2},$$

welches die Zeit ist, die der Schwerpunkt des Körpers gebraucht,

um in seine tiefste Lage zu kommen, d. h. die Dauer einer Viertelschwingung, so daß folglich die Dauer einer halben Schwingung gleich:

$$\pi \sqrt{\frac{\Sigma pr^2}{g \Pi \rho}},$$

und die einer ganzen Schwingung, d. h. die Zeit, welche seit dem Anfange der Bewegung des Körpers bis zu dem Augenblicke verfließt, wo derselbe wieder in seine ursprüngliche Lage gekommen ist, gleich:

$$2\pi \sqrt{\frac{\Sigma pr^2}{g \Pi \rho}}$$

ist.

Trägheitsmoment.

Die Summe Σpr^2 wird das Trägheitsmoment des Körpers in Beziehung auf die Axe, welcher die Entfernungen r entsprechen, genannt, und ist nichts anders, als die Summe der Produkte, welche man erhält, wenn man das Gewicht jedes Molekules des Körpers durch das Quadrat seiner Entfernung von der Axe multiplicirt. Diese Größe kommt bei der Berechnung der Maschinen häufig vor; denn aus den vorhergehenden Rechnungen sieht man, daß man die lebendige Kraft eines Körpers erhält, welcher in einem gegebenen Augenblicke die Winkelgeschwindigkeit φ hat, wenn man das Trägheitsmoment mit $\frac{\varphi^2}{2g}$, d h. mit der der Geschwindigkeit φ entsprechenden Fallhöhe multiplicirt. Das Trägheitsmoment spielt folglich in Beziehung auf die Bestimmung der lebendigen Kraft bei einer Rotationsbewegung dieselbe Rolle, wie das Gewicht des Körpers bei der progressiven Bewegung.*)

Man erhält die Größe Σpr^2 durch die Methoden der Integralrechnung, indem man die verschiedenen Punkte des Körpers gewöhnlich auf zwei durch die Drehungsaxe gelegten rechtwinkligen Ebenen bezieht, und $x^2 + y^2$ für r^2 setzt, wo x, y die Entfernungen eines beliebigen Punktes des Körpers von diesen beiden Ebenen bezeichnen, so daß man alsdann blos die Summe $\Sigma px^2 + \Sigma py^2$ zu berechnen hat. Wenn aber U und V die Flächen der Durchschnitte des Körpers mit Ebenen, welche zu den beiden Koordinatenebenen parallel, und folglich auf den Axen der x und der y

*) Nur in diesem § versteht der Verfasser unter Trägheitsmoment die Größe Σpr^2, sonst aber immer die Größe $\Sigma \frac{p}{g} r^2$.

senkrecht sind, bezeichnen; so hat man für einen Körper von einer mathematisch bestimmten Form:

$$\Sigma p x^2 = \tilde{\omega} \int_{x_0}^{x_1} U x^2 dx \text{ und } \Sigma p y^2 = \tilde{\omega} \int_{y_0}^{y_1} V y^2 dy,$$

wo $\tilde{\omega}$ das Gewicht der Volumeneinheit des Körpers und x_0, x_1, y_0, y_1 die seinen Grenzen entsprechenden Koordinaten sind.

Wenn K das Trägheitsmoment eines Körpers in Beziehung auf eine durch seinen Schwerpunkt gehende Axe bezeichnet, so läßt sich leicht zeigen, daß das Trägheitsmoment dieses Körpers in Beziehung auf eine zweite zu der ersten parallele und um die Länge ρ von ihr entfernte Axe durch:

$$K + \Pi \rho^2$$

ausgedrückt wird, wo Π das Totalgewicht des Körpers bezeichnet. Denn wenn sich x, y auf die durch den Schwerpunkt des Körpers gehende Axe beziehen und a, b bezeichnen die Koordinaten eines Punktes der neuen Axe; so sind $x-a$, $y-b$ die Koordinaten eines beliebigen Punktes des Körpers in Beziehung auf diese neue Axe, und man hat folglich für das Trägheitsmoment K′ des Körpers in Beziehung auf diese letzte Axe:

$$K' = \tilde{\omega} \int_{x_0}^{x_1} U (x-a)^2 dx + \tilde{\omega} \int_{y_0}^{y_1} V (y-b)^2 dy.$$

Da die erste Axe durch den Schwerpunkt des Körpers geht, so hat man vermöge der Eigenschaft dieses Punktes (§. 38):

$$\tilde{\omega} \int_{x_0}^{x_1} U x dx = 0 \text{ und } \tilde{\omega} \int_{y_0}^{y_1} V y dy = 0,$$

und folglich verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in folgende:

$$K' = \tilde{\omega} \int_{x_0}^{x_1} U x^2 dx + \tilde{\omega} \int_{y_0}^{y_1} V y^2 dy + a^2 \tilde{\omega} \int_{x_0}^{x_1} U dx + b^2 \tilde{\omega} \int_{y_0}^{y_1} V dy.$$

Nun ist aber:

$$\Pi = \tilde{\omega} \int_{x_0}^{x_1} V dx = \tilde{\omega} \int_{y_0}^{y_1} V dy,$$

und:

$$K = \tilde{\omega} \int_{x_0}^{x_1} U x^2 dx + \tilde{\omega} \int_{y_0}^{y_1} V y^2 dy;$$

folglich wird der Werth von K′:

$$K' = K + \Pi(a^2 + b^2),$$

oder wenn man die Entfernung $\sqrt{a^2+b^2}$ der zweiten Axe von der ersten mit ρ bezeichnet:

$$K' = K + \Pi\rho^2,$$

was bewiesen werden sollte. Hieraus folgt, daß unter allen Trägheitsmomenten desselben Körpers in Beziehung auf parallele Axen das am kleinsten ist, welches sich auf die durch den Schwerpunkt gehende Axe bezieht.

Wenn man den letzten Werth des Trägheitsmomentes in den Ausdruck der Dauer T einer halben Schwingung des Pendels substituirt, so erhält man:

$$T = \pi\sqrt{\frac{K}{g\Pi\rho} + \frac{\rho}{g}} = \pi\sqrt{\frac{\frac{K}{\Pi\rho} + \rho}{g}},$$

und wenn der Körper nur sehr geringe Dimensionen hat, wie solches bei einer an einem sehr dünnen Faden, dessen Gewicht unberücksichtigt bleiben kann, aufgehangenen Bleikugel der Fall ist; so kann die Größe $\frac{K}{\Pi\rho}$ vernachlässigt werden, und man hat blos:

$$T = \pi\sqrt{\frac{\rho}{g}},$$

wo die Entfernung ρ alsdann die Länge des einfachen Pendels genannt wird; aber wenn der Körper etwas merkliche Dimensionen hat, so setzt man $\rho + \frac{K}{\Pi\rho}$ statt ρ. Die Schwingungen finden also in derselben Zeit statt, als wenn sich das Pendel auf eine sehr kleine Kugel reducirte, welche an einen Faden aufgehangen ist, dessen Länge der vorhergehende Ausdruck bestimmt, indem K, wie wir gesehen haben, das Trägheitsmoment in Beziehung auf eine durch den Schwerpunkt des Körpers gehende Axe und ρ die Entfernung der Aufhängungsaxe von diesem Schwerpunkte bezeichnet.

Die Größe K läßt sich für ein rechtwinkliges Parallelepipedum, dessen Kanten a, b, c sind, und wenn die Axe zu der Kante c parallel ist, leicht berechnen. Man findet:

$$K = \frac{\omega abc}{12}(a^2+b^2) = \Pi\left(\frac{a^2+b^2}{12}\right),$$

und wenn die Axe von der Seitenfläche, deren Kanten a, c sind, um die Länge l entfernt ist; so hat man:

$$\rho = l + \frac{b}{2}.$$

Das Trägheitsmoment eines rechtwinkligen Parallelepipedums in Beziehung auf eine Axe, welche in der Halbirungsebene des Körpers liegt, und um die Länge l von einer seiner Grundflächen entfernt ist, wird folglich ausgedrückt durch:

$$K' = \Pi\left(\frac{a^2+b^2}{12}\right) + \Pi\left(l+\frac{b}{2}\right)^2 = \Pi\left[\frac{a^2+4b^2}{12} + bl + l^2\right].$$

Wenn a gegen b sehr klein ist, so hat man nahezu:

$$K' = \Pi\left(\frac{b^2}{3} + bl + l^2\right),$$

und wenn $l=0$ wird; so reducirt sich dieser Ausdruck auf:

$$K' = \frac{1}{3}\Pi.b^2,$$

d. h. das Trägheitsmoment einer sehr dünnen Stange in Beziehung auf eine auf ihrer Länge senkrechte und durch einen ihrer Endpunkte gehende Axe ist dasselbe, als wenn der dritte Theil des Gewichtes Π der Stange als ein schwerer Punkt an einen gewichtslosen Faden von der Länge b der Stange aufgehangen würde.

Wenn man das Trägheitsmoment eines massiven Cylinders in Beziehung auf seine Axe berechnet, so findet man leicht, daß es dasselbe ist, als wenn die Hälfte des Gewichtes des Cylinders auf seiner krummen Oberfläche gleichförmig vertheilt wäre. Wenn also Π das Gewicht des Cylinders und R seinen Halbmesser bezeichnet, so ist sein Trägheitsmoment in Beziehung auf seine Axe der Figur als Rotationsaxe:

$$\frac{1}{2}\Pi.R^2.$$

Um das Trägheitsmoment einer Kugel von dem Halbmesser R in Beziehung auf einen ihrer Durchmesser zu erhalten, berechnet man:

$$\tilde{\omega}\int_{-R}^{+R} Ux^2dx + \tilde{\omega}\int_{-R}^{+R} Vy^2dy,$$

wo:

$$U = \pi(R^2 - x^2) \text{ und } V = \pi(R^2 - y^2)$$

ist, und $\tilde{\omega}$, π resp. das Gewicht der Volumeneinheit und das Verhältniß des Kreisumfanges zum Durchmesser bezeichnet. Da das Totalgewicht Π der Kugel durch $\tilde{\omega}\,\frac{4}{3}\,\pi R^3$ ausgedrückt wird, so findet man:

$$K' = \frac{2}{5}\,\Pi R^2,$$

d. h. das Trägheitsmoment ist dasselbe, als wenn man $\frac{2}{5}$ des Gewichtes der Kugel in den Endpunkt eines auf der Drehungsaxe senkrechten Halbmessers brächte.

Wir werden später wieder auf die Rotationsbewegung zurückkommen, indem wir alsdann auch die Reibungen in Rechnung bringen werden.

Allgemeine Gleichungen der Bewegung eines Systemes von festen Körpern, oder einer beliebigen Maschine, wenn die Reibungen unberücksichtigt bleiben.

§. 44. Wenn die Bewegung einer Maschine auf mehrere Arten statt finden kann, d. h. wenn man mehrere Veränderliche als Funktionen der Zeit bestimmen muß, um jeden Augenblick die relative Lage aller Körper, woraus die Maschine besteht, angeben zu können; so ist die Gleichung der lebendigen Kräfte zur Bestimmung dieser Veränderlichen nicht mehr hinreichend, und man muß alsdann virtuelle Geschwindigkeiten anwenden, d. h. die Elemente der virtuellen Arbeit in Betracht ziehen, wie bei der Bewegung eines einzelnen Körpers. Wir wollen daher die Gleichung (E) in §. 36 für eine beliebige virtuelle Bewegung wieder betrachten, so können wir, wie bereits bemerkt worden, die virtuellen Bewegungen zunächst auf diejenigen beschränken, welche mit der Annahme verträglich sind, daß der Körper während der virtuellen Verrückung vollkommen fest bleibt, und folglich seine Form nicht ändert, so daß in dem zweiten Theile dieser Gleichung die den Molekularwirkungen desselben Körpers entsprechenden Glieder verschwinden (§. 34).

Ferner wollen wir die virtuellen Bewegungen noch mehr partikularisiren, indem wir sie so annehmen, daß die Körper in vollkommener Berührung mit einander bleiben, wie solches bei Maschinen nothwendig ist. Wenn man alsdann annimmt, daß jede gegenseitige Einwirkung R zwischen zwei Molekulen zweier ver-

ſchiedener Körper nur dann einen merklichen Werth hat, wenn die gegenſeitige Entfernung r dieſer Molekule ihrem Minimum ſehr nahe, und folglich $dr = 0$ iſt, oder vernachläſſigt werden kann; ſo iſt auch das Produkt Rdr und mithin das Integral $\int Rdr$ Null oder kann unberückſichtigt bleiben. Die von den Molekularwirkungen bei der Berührung herrührenden Quantitäten der virtuellen Arbeit verſchwinden folglich aus dem zweiten Theile der in Rede ſtehenden Gleichung, und es bleiben nur die von den äußern Kräften herrührenden virtuellen Arbeitselemente.

Dieſer zweite Theil der Gleichung läßt ſich im Allgemeinen als Funktion der Zeit berechnen, und der erſte Theil derſelben enthält die Differenziale der Geſchwindigkeiten, ſo wie die virtuellen Geſchwindigkeiten aller Molekule. Nimmt man nun an, daß jeder der Körper, woraus die Maſchine beſteht, vollkommen feſt iſt, d. h. ſeine Form nicht ändert; ſo ſtehen dieſe virtuellen Geſchwindigkeiten in ſolchen geometriſchen Verhältniſſen zu einander, daß man ſie für alle Molekule der Maſchine durch eine gewiſſe Anzahl derſelben, oder allgemeiner durch die Differenziale einer gewiſſen Anzahl völlig unabhängiger Veränderlicher in Beziehung auf die Zeit ausdrücken kann. Nimmt man folglich ſucceſſive ſo viele verſchiedene virtuelle Bewegungen an, als erforderlich ſind, um eben ſo viele Differenzialgleichungen zu erhalten, als man unabhängige Veränderliche hat; ſo kann man nach einer vorläufigen Elimination den Werth jeder dieſer Veränderlichen durch Integration als Funktion der Zeit beſtimmen, indem man die willkührlichen Konſtanten nach der anfänglichen Bewegung des Syſtemes beſtimmt. Man erhält alſo auf dieſe Weiſe alle Gleichungen, welche erforderlich und hinreichend ſind, um jeden Augenblick die Bewegung der verſchiedenen Theile der Maſchine beſtimmen zu können. Da aber bei techniſchen Anwendungen im Allgemeinen keine Maſchinen vorkommen, bei denen mehrere Bewegungen möglich ſind; ſo wollen wir uns auch hier bei der Anführung von Beiſpielen nicht aufhalten.

Gleichgewicht und Aequivalenz der auf ein beliebiges Syſtem von Körpern, oder auf irgend eine Maſchine wirkenden Kräfte.

§. 45. Die Bedingungen des Gleichgewichtes eines Syſtemes von Kräften, welche auf eine Maſchine wirken, laſſen ſich aus den Differenzialgleichungen der Bewegung dieſer Maſchine ableiten, und man braucht zu dem Zwecke nur die Summe der von dieſen Kräften abhängigen Glieder in den zweiten Theilen dieſer Gleichungen gleich Null zu ſetzen. Denn wenn dieſe Kräfte im Gleichgewichte ſein ſollen, ſo müſſen ſie die bereits exiſtirenden Bewegungen auf keine Weiſe ändern können, d. h. die zweiten Theile

dieſer Gleichungen müſſen ungeändert bleiben, wenn man dieſe Kräfte einführt oder hinwegläßt.

Es entſtehen zwar durch die Wirkung der äußern Kräfte, deren Gleichgewicht man betrachtet, in Folge der Berührung der Körper neue innere Molekularwirkungen, ſo daß es genau genommen nicht gleichgültig iſt, ob man dieſe äußern Kräfte einführt, oder hinwegläßt; allein man darf nicht vergeſſen, daß ſich unſere theoretiſchen Betrachtungen, wie weiter oben, auf eine Vorausſetzung ſtützen, vermöge welcher die von den Molekularwirkungen herrührenden Elemente der virtuellen Arbeit verſchwinden.

In dieſer Vorausſetzung kann man alſo ſagen, daß zum Gleichgewichte der auf eine beliebige Maſchine wirkenden äußern Kräfte für alle Bewegungen, welche dieſe Maſchine geſtattet, erforderlich iſt, daß die Summen der Elemente der virtuellen Arbeit Null ſind. Dieſe Bedingungen ſind offenbar nothwendig; aber ſie ſind auch hinreichend, weil, ſobald ſie erfüllt werden, die Differenzialgleichungen der Bewegungen, und folglich auch dieſe Bewegungen ungeändert bleiben, man mag dieſe äußern Kräfte einführen, oder hinweglaſſen, woraus nach der Definition folgt, daß ſie im Gleichgewichte ſind.

§. 46. Zwei ſucceſſive auf dieſelbe Maſchine wirkende Syſteme von Kräften heißen äquivalent, wenn ſie identiſche Bewegungen hervorbringen, und folglich findet dieſe Aequivalenz ſtatt, wenn für alle Bewegungen, welche die Maſchine geſtattet, die Summen der Elemente der virtuellen Arbeit für dieſe beiden Syſteme von Kräften gleich ſind. Denn wenn dieſe Bedingung erfüllt wird, ſo ſind die zweiten Theile der Differenzialgleichungen der Bewegung für beide Syſteme von Kräften dieſelben, und folglich ſind auch die in beiden Fällen hervorgebrachten Bewegungen identiſch.

Princip der Uebertragung der Arbeit bei der Bewegung eines feſten Körpers, wenn auf die Erſchütterungen der Molekule deſſelben Rückſicht genommen wird.

§. 47. In dem Vorhergehenden haben wir angenommen, daß die Molekule deſſelben Körpers während der ganzen Bewegung dieſelben gegenſeitigen Entfernungen von einander behalten, und wir haben geſehen, daß durch dieſe Hypotheſe die Berechnung der von den gegenſeitigen Molekularwirkungen herrührenden Quantitäten Arbeit überflüſſig gemacht wurde, und alle Geſchwindigkeiten der verſchiedenen Molekule durch eine kleine Anzahl unabhängiger Veränderlicher, und meiſtens durch eine einzige unabhängige Veränderliche, ausgedrückt werden konnten.

In der Wirklichkeit werden aber die Molekule auch der feſteſten Körper erſchüttert, und folglich mit relativen Geſchwindigkeiten in Beziehung auf einander bewegt. Dieſe Geſchwindigkeiten

zeigen sich z. B. bei allen Körpern, welche unter der Wirkung der Reibung oder des Stoßes tönen, und sie können auch unter vielen andern Umständen statt finden, wo sie weniger in die Augen fallen. Je mehr Fortschritte die Physik macht, desto nothwendiger wird die Betrachtung der Molekularbewegungen bei der Erklärung einer Menge von Erscheinungen. Man kann daher diese Betrachtung der Molekularbewegungen auch bei mechanischen Untersuchungen nicht mehr umgehen, wenn die Grundprincipien nicht ihre Strenge verlieren, und die Anwendungen derselben nicht unsicher gemacht werden sollen. Wir wollen daher in dem Folgenden diese Molekularbewegungen in Betracht zu ziehen suchen.

Die einzige Voraussetzung, welche wir machen, um die im Vorhergehenden aufgestellten Principien auf den Fall auszudehnen, wo die Molekule erschüttert werden, besteht in der Annahme, daß sich die gegenseitigen Entfernungen der Molekule nur um Größen ändern, welche gegen die Dimensionen der Körper sehr klein sind, so daß man sich immer mit dem Körper fortbewegte Koordinatenebenen denken kann, in Beziehung auf welche sich die Koordinaten der Molekule während der Bewegung nur um sehr kleine Größen ändern, obgleich die relativen Geschwindigkeiten dieser Molekule gegen diese Ebenen sehr beträchtlich sein können.

Aus dieser Hypothese folgt, daß während der Bewegung alle Integrale, welche die Summen der Produkte aus den Gewichten der Molekule und gewissen Funktionen ihrer Koordinaten in Beziehung auf die eben erwähnten beweglichen Ebenen ausdrücken, ungeachtet der Erschütterungen der Molekule als konstant betrachtet werden können; denn die Veränderungen, welche diese Erschütterungen in den Werthen dieser Integrale zur Folge haben, sind gegen diese Werthe unendlich klein, und können folglich vernachlässigt werden.

Zu den beweglichen Koordinatenebenen, auf welche wir die schwingenden Bewegungen der Molekule beziehen werden, wollen wir Ebenen nehmen, welche eine solche Bewegung haben, daß, wenn man annimmt, daß die Molekule in einem beliebigen Augenblicke aufhören zu schwingen, und mit diesen Ebenen fest verbunden bleiben, so daß sie einen festen Körper bilden, welcher sich mit diesen Ebenen zugleich fortbewegt, zwischen den fingirten Geschwindigkeiten in diesem Zustande der Festigkeit und denen, welche wirklich in dem schwingenden Zustande der Molekule statt finden, die drei folgenden Relationen statt finden:

$$\text{(A)}\quad \begin{cases} \Sigma\Pi\left(x\,\frac{dmy}{dt} - y\,\frac{dmx}{dt}\right) = \Sigma\Pi\left(x\,\frac{dy}{dt} - y\,\frac{dx}{dt}\right), \\ \Sigma\Pi\left(y\,\frac{dmz}{dt} - z\,\frac{dmy}{dt}\right) = \Sigma\Pi\left(y\,\frac{dz}{dt} - z\,\frac{dy}{dt}\right), \\ \Sigma\Pi\left(z\,\frac{dmx}{dt} - x\,\frac{dmz}{dt}\right) = \Sigma\Pi\left(z\,\frac{dx}{dt} - x\,\frac{dz}{dt}\right), \end{cases}$$

worin $\frac{d_m x}{dt}$, $\frac{d_m y}{dt}$, $\frac{d_m z}{dt}$ die fingirten Geschwindigkeiten für das vollkommen feste System, Π das Gewicht eines beliebigen Molekules und x, y, z die Koordinaten in Beziehung auf feste Ebenen bezeichnen. Die Bewegung, welche die beweglichen Ebenen jeden Augenblick annehmen müssen, um diesen Gleichungen zu genügen, wollen wir die mittlere Bewegung nennen.

Zunächst wollen wir bemerken, daß die vorhergehenden Gleichungen auch statt finden, wenn man den beweglichen Schwerpunkt des Systemes zum Anfangspunkte nimmt. Denn wenn ξ, η, ζ die veränderlichen Koordinaten dieses Schwerpunktes und x, y, z die auf diesen beweglichen Anfangspunkt bezogenen Koordinaten bezeichnen; so braucht man für die vorhergehenden Koordinaten nur $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ zu setzen, und zu bemerken, daß man, da der Schwerpunkt der Anfangspunkt der neuen Koordinaten x, y, z ist, jeden Augenblick hat:

$$\Sigma\Pi x=0, \quad \Sigma\Pi y=0, \quad \Sigma\Pi z=0,$$

und folglich, wenn man in Beziehung auf die Zeit differenzirt:

$$\text{(B)} \qquad \Sigma\Pi \frac{dx}{dt}=0, \ \Sigma\Pi \frac{dy}{dt}=0, \ \Sigma\Pi \frac{dz}{dt}=0.$$

Da aber der Schwerpunkt auch der Schwerpunkt des Systemes bleibt, während es sich wie ein fester Körper bewegt; so kann man auch setzen:

$$\text{(C)} \qquad \Sigma\Pi \frac{d_m x}{dt}=0, \ \Sigma\Pi \frac{d_m y}{dt}=0, \ \Sigma\Pi \frac{d_m z}{dt}=0.$$

Berücksichtigt man die Gleichungen (B) und (C), so behalten die Gleichungen (A), welche die mittlere Bewegung ausdrücken, nachdem man darin $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ resp. für x, y, z gesetzt hat, ganz dieselbe Form, und man kann daher annehmen, daß sie sich auf Ebenen beziehen, welche unveränderliche Richtungen behalten, und den Schwerpunkt des Systemes zum beweglichen Anfangspunkte haben.

Untersuchen wir nun einige Eigenschaften der mittleren Rotationsbewegung, wie sie durch die Gleichungen (A) in Beziehung auf den beweglichen Schwerpunkt als Anfangspunkt bestimmt wird, indem wir unsere obige Hypothese in Beziehung auf die Schwingungen der Molekule beibehalten, d. h. wieder annehmen, daß sich die gegenseitigen Entfernungen der Molekule nur sehr wenig ändern können, so daß man annehmen kann, daß diese Molekule jeden Augenblick sehr wenig von den Lagen entfernt sind, welche sie in einem vollkommen festen Körper haben würden, worin folglich keine Schwingungen statt finden.

Es seien x_1, y_1, z_1 die fingirten Koordinaten der Lagen, welche die Molekule in einem vollkommen festen Körper haben würden; so ist leicht einzusehen, daß man für jeden Augenblick nahezu setzen kann:

$$(D)\quad \begin{cases} \Sigma\Pi\left(x\frac{dmy}{dt} - y\frac{dmx}{dt}\right) = \Sigma\Pi\left(x_1\frac{dmy_1}{dt} - y_1\frac{dmx_1}{dt}\right), \\ \Sigma\Pi\left(y\frac{dmz}{dt} - z\frac{dmy}{dt}\right) = \Sigma\Pi\left(y_1\frac{dmz_1}{dt} - z_1\frac{dmy_1}{dt}\right), \\ \Sigma\Pi\left(z\frac{dmx}{dt} - x\frac{dmz}{dt}\right) = \Sigma\Pi\left(z_1\frac{dmx_1}{dt} - x_1\frac{dmz_1}{dt}\right); \end{cases}$$

denn die ersten und zweiten Theile dieser Gleichungen können durch Größen p, q, r, p_1, q_1, r_1 ausgedrückt werden, welche jeden Augenblick die Lage der augenblicklichen Rotationsaxe des festen Systemes und die Winkelgeschwindigkeit um diese Axe bestimmen, wie im §. 28 gezeigt ist. Man hat daher:

$$\frac{dmx}{dt} = qz - ry,$$

$$\frac{dmy}{dt} = rx - pz,$$

$$\frac{dmz}{dt} = py - qx,$$

so daß die frühern Gleichungen (D) in drei Gleichungen von folgender Form übergehen:

$$r(\Sigma\Pi x^2 + \Sigma\Pi xy) - p\Sigma\Pi xz - q\Sigma\Pi yz =$$
$$r_1(\Sigma\Pi x_1^2 + \Sigma\Pi x_1 y_1) - p_1\Sigma\Pi x_1 z_1 - q\Sigma\Pi y_1 z_1.$$

Da aber die Summen $\Sigma\Pi x_1^2$, $\Sigma\Pi x_1 y_1$, etc. nach der Voraussetzung nahezu den Summen $\Sigma\Pi x^2$, $\Sigma\Pi xy$, etc. gleich sind; so werden die obigen Gleichungen (D) erfüllt, wenn man hat:

$$p = p_1, \quad q = q_1, \quad r = r_1.$$

Hieraus folgt, daß die mittlere Bewegung, welche nach der Definition durch die in den ersten Theilen der Gleichungen (A) vorkommenden Größen p, q, r bestimmt wird, nahezu die Bewegung des festen Körpers ist, dessen Molekule sich wenig von den schwingenden Molekulen entfernen, und dessen Rotation jeden Augenblick durch die Größen $p_1 = p$, $q_1 = q$, $r_1 = r$ bestimmt wird.

Außerdem kann man beweisen, daß diese Bewegung des festen Körpers, dessen Molekule die Koordinaten x_1, y_1, z_1 haben, die-

jenige ist; welche er unter der alleinigen Wirkung der äußern auf das schwingende System wirkenden Kräfte annehmen würde. Denn vermöge der obigen Gleichungen (D) verwandeln sich die Gleichungen (A), welche die mittlere Bewegung bestimmen, in folgende:

$$(E)\quad \begin{cases} \Sigma\Pi\left(x_1\frac{d_m y_1}{dt}-y_1\frac{d_m x_1}{dt}\right)=\Sigma\Pi\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right), \\ \Sigma\Pi\left(y_1\frac{d_m z_1}{dt}-z_1\frac{d_m y_1}{dt}\right)=\Sigma\Pi\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right), \\ \Sigma\Pi\left(z_1\frac{d_m x_1}{dt}-x_1\frac{d_m z_1}{dt}\right)=\Sigma\Pi\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right), \end{cases}$$

Differenzirt man nun diese Gleichungen in Beziehung auf die Zeit auf die vollständigste Weise in beiden Theilen, damit die Ableitungen einander gleich werden, und bemerkt, daß, da x_1, y_1, z_1 demselben festen Körper entsprechen, $d_m x_1$ dasselbe ist, wie dx_1, weil x_1 nur für denselben festen Körper variiren kann; so erhält man:

$$(F)\quad \begin{cases} \Sigma\Pi\left(x_1\frac{d^2 y_1}{dt^2}-y_1\frac{d^2 x_1}{dt^2}\right)=\Sigma\Pi\left(x\frac{d^2 y}{dt^2}-y\frac{d^2 x}{dt^2}\right), \\ \Sigma\Pi\left(y_1\frac{d^2 z_1}{dt^2}-z_1\frac{d^2 y_1}{dt^2}\right)=\Sigma\Pi\left(y\frac{d^2 z}{dt^2}-z\frac{d^2 y}{dt^2}\right), \\ \Sigma\Pi\left(z_1\frac{d^2 x_1}{dt^2}-x_1\frac{d^2 z_1}{dt^2}\right)=\Sigma\Pi\left(z\frac{d^2 x}{dt^2}-x\frac{d^2 z}{dt^2}\right). \end{cases}$$

Wir wollen nun das Princip von d'Alembert und das der virtuellen Geschwindigkeiten anwenden, um gewisse Gleichungen für die Bewegung in dem schwingenden Systeme zu erhalten, und für die virtuellen Verrückungen die nehmen, welche sich aus der Annahme ergeben, daß das System der Molekule einen festen Körper bildet; so haben wir für die Rotationsbewegungen dieses Systemes um die drei durch den Schwerpunkt gehenden Koordinatenaxen die Gleichungen:

$$(G)\quad \begin{cases} \Sigma\Pi\left(x\frac{d^2 y}{dt^2}-y\frac{d^2 x}{dt^2}\right)=\Sigma(x\mathrm{Y}-y\mathrm{Z}), \\ \Sigma\Pi\left(y\frac{d^2 z}{dt^2}-z\frac{d^2 y}{dt^2}\right)=\Sigma(y\mathrm{Z}-z\mathrm{Y}), \\ \Sigma\Pi\left(z\frac{d^2 x}{dt^2}-x\frac{d^2 z}{dt^2}\right)=\Sigma(z\mathrm{X}-x\mathrm{Z}), \end{cases}$$

wo die in den zweiten Theilen vorkommenden Kräfte X, Y, Z allein von den äußern Wirkungen herrühren; denn die Momente

von der Form $xY - yX$ ſind für die gegenſeitigen Einwirkungen zweier Molekule deſſelben Syſtemes Null.

Aus der Vergleichung der vorhergehenden Gleichungen (F) und (G) ergibt ſich:

$$(H)\quad \begin{cases} \Sigma\Pi\left(x_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} - y_1 \frac{d^2x_1}{dt^2}\right) = \Sigma(xY - yX), \\ \Sigma\Pi\left(y_1 \frac{d^2z_1}{dt^2} - z_1 \frac{d^2y_1}{dt^2}\right) = \Sigma(yZ - zY), \\ \Sigma\Pi\left(z_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} - x_1 \frac{d^2z_1}{dt^2}\right) = \Sigma(zX - xZ). \end{cases}$$

Da aber die Koordinaten x, y, z der ſchwingenden Molekule ſehr wenig von x_1, y_1, z_1 verſchieden ſind, ſo kann man in den zweiten Theilen dieſer letzten Gleichungen x_1, y_1, z_1 für x, y, z ſetzen, wodurch man erhält:

$$\Sigma\Pi\left(x_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} - y_1 \frac{d^2x_1}{dt^2}\right) = \Sigma(x_1Y - y_1X),$$

$$\Sigma\Pi\left(y_1 \frac{d^2z_1}{dt^2} - z_1 \frac{d^2y_1}{dt^2}\right) = \Sigma(y_1Z - z_1Y),$$

$$\Sigma\Pi\left(z_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} - x_1 \frac{d^2z_1}{dt^2}\right) = \Sigma(z_1X - x_1Z).$$

Dieſe Gleichungen beziehen ſich nun auf ein einziges feſtes Syſtem und beſtimmen die Bewegung deſſelben, wenn blos die äußern Kräfte X, Y, Z, etc. darauf wirken. Die mittlere Rotationsbewegung, welche wir in dem Folgenden anwenden werden, iſt alſo die eines feſten Körpers ohne Schwingungen der Molekule, worauf dieſelben äußern Kräfte wirken, wie auf das ſchwingende Syſtem, und dieſe letzte Bewegung iſt folglich die, welche in der Praxis angewandt wird, wenn man auf die Schwingungen der Molekule keine Rückſicht nimmt.

Wir wollen nun eine Eigenſchaft der mittlern Rotationsbewegung erörtern, welche eigentlich nur eine unmittelbare Folgerung aus ihrer Definition iſt; aber den Vortheil gewährt, daß ſie ſich unter einer Form darbietet, welche für den Gebrauch von Nutzen iſt, den wir bald von Koordinatenebenen machen werden, welche ſich mit dieſer mittlern Rotationsbewegung um den Schwerpunkt des Syſtemes drehen.

Die Gleichungen (A), welche die mittlere Bewegung beſtimmen, können auf folgende Form gebracht werden:

$$(I)\quad \begin{cases} \Sigma\Pi\left[x\left(\frac{dy}{dt}-\frac{d_m y}{dt}\right)-y\left(\frac{dx}{dt}-\frac{d_m x}{dt}\right)\right]=0, \\ \Sigma\Pi\left[y\left(\frac{dz}{dt}-\frac{d_m z}{dt}\right)-z\left(\frac{dy}{dt}-\frac{d_m y}{dt}\right)\right]=0, \\ \Sigma\Pi\left[z\left(\frac{dx}{dt}-\frac{d_m x}{dt}\right)-x\left(\frac{dz}{dt}-\frac{d_m z}{dt}\right)\right]=0. \end{cases}$$

Wenn man durch $\frac{d_r x}{dt}$, $\frac{d_r y}{dt}$, $\frac{d_r z}{dt}$ die relativen Geschwindigkeiten der Molekule in Beziehung auf Koordinatenebenen bezeichnet, die mit einem die mittlere Bewegung habenden Körper fortrücken; so ist klar, daß die den Schwingungen entsprechenden wirklichen Geschwindigkeiten, nämlich $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ die Resultanten aus den Geschwindigkeiten $\frac{d_m x}{dt}$, $\frac{d_m y}{dt}$, $\frac{d_m z}{dt}$ und aus den relativen Geschwindigkeiten $\frac{d_r x}{dt}$, $\frac{d_r y}{dt}$, $\frac{d_r z}{dt}$ sind. Man hat also:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d_m x}{dt}+\frac{d_r x}{dt},\ \text{folglich:}\ \frac{dx}{dt}-\frac{d_m x}{dt}=\frac{d_r x}{dt},$$
$$\frac{dy}{dt}=\frac{d_m y}{dt}+\frac{d_r y}{dt}\quad\text{»}\quad \frac{dy}{dt}-\frac{d_m y}{dt}=\frac{d_r y}{dt},$$
$$\frac{dz}{dt}=\frac{d_m z}{dt}+\frac{d_r z}{dt}\quad\text{»}\quad \frac{dz}{dt}-\frac{d_m z}{dt}=\frac{d_r z}{dt}$$

und die vorhergehenden Gleichungen (I) können also auf folgende Form gebracht werden:

$$(J)\quad \begin{cases} \Sigma\Pi\left(x\,\frac{d_r y}{dt}-y\,\frac{d_r x}{dt}\right)=0, \\ \Sigma\Pi\left(y\,\frac{d_r z}{dt}-z\,\frac{d_r y}{dt}\right)=0, \\ \Sigma\Pi\left(z\,\frac{d_r x}{dt}-x\,\frac{d_r z}{dt}\right)=0. \end{cases}$$

Es seien x', y', z' die Koordinaten der schwingenden Molekule in Beziehung auf Koordinatenebenen, welche die mittlere Bewegung haben und immer durch den beweglichen Schwerpunkt des Systemes gehen, und a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' seien die Kosinus der Winkel, welche die beweglichen Axen der x', y', z' resp. mit den festen Axen der x, y, z bilden; so hat man nach der Theorie der Projektionen:

$$x = ax' + by' + cz',$$
$$y = a'x' + b'y' + c'z',$$
$$z = a''x' + b''y' + c''z'.$$

Differenzirt man dieſe Gleichungen unter der Vorausſetzung, daß die Molekule nur relative Geſchwindigkeiten in Beziehung auf die als feſt betrachteten beweglichen Koordinatenebenen haben, ſo ſind x', y', z' allein in den zweiten Theilen veränderlich, und man erhält:

$$d_r x = a dx' + b dy' + c dz',$$
$$d_r y = a' dx' + b' dy' + c' dz',$$
$$d_r z = a'' dx' + b'' dy' + c'' dz'.$$

Subſtituirt man dieſe Werthe in die Gleichungen (J), ſo bekommt man die Gleichungen:

$$(ab' - ba')\,\Sigma\Pi\,(x'dy' - y'dx') + (bc' - cb')\,\Sigma\Pi\,(y'dz' - z'dy') + (ca' - ac')\,\Sigma\Pi\,(z'dx' - x'dz') = 0,$$
$$(a'b' - b'a')\,\Sigma\Pi\,(x'dy' - y'dx') + (b'c'' - c'b'')\,\Sigma\Pi\,(y'dz' - z'dy') + (c'a'' - a'c'')\,\Sigma\Pi\,(z'dx' - x'dz') = 0,$$
$$(a''b - b''a)\,\Sigma\Pi\,(x'dy' - y'dx') + (b''c - c''b)\,\Sigma\Pi\,(y'dz' - z'dy') + (c''a - a''c)\,\Sigma\Pi\,(z'dx' - x'dz') = 0,$$

welche geben:

$$\text{(K)} \qquad \begin{cases} \Sigma\Pi\,(x'dy' - y'dx') = 0, \\ \Sigma\Pi\,(y'dz' - z'dy') = 0, \\ \Sigma\Pi\,(z'dx' - x'dz') = 0. \end{cases}$$

Wenn man Polarkoordinaten in den Koordinatenebenen, z. B. in der Ebene der $x'y'$ anwendet, und daher ſetzt:

$$x' = r\cos\vartheta, \quad y' = r\sin\vartheta,$$

ſo findet man leicht:

$$x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt} = r^2\frac{d\vartheta}{dt} = 0.$$

Aber $\frac{1}{2}r^2 d\vartheta$ iſt das Differenzial der Fläche, welche der vom Anfangspunkte nach dem Punkte (x', y', z') gehende Radiusvektor beſchreibt, und die Gleichungen (K) drücken alſo folgenden

Satz aus: Wenn man die ſchwingenden Bewegungen der Molekule auf Koordinatenebenen bezieht, welche mit dem Syſteme fortrücken, und um den zum beweglichen Anfangspunkte genommenen Schwerpunkt die von uns ſogenannte **mittlere Rotationsbewegung** haben; ſo ſind die Summen der Produkte aus den Maſſen der Molekule und aus den Differenzialen der Flächen, welche die Projektionen der von dem Schwerpunkte nach allen Molekulen des Syſtemes gezogenen Radienvektoren auf den beweglichen Koordinatebenen bei der relativen Bewegung beſchreiben, beſtändig gleich Null.

Später werden wir uns dieſes Satzes, d. h. der Gleichungen (K), worin derſelbe enthalten iſt, zum Beweiſe anderer wichtigerer Sätze bedienen.

§. 48. Ehe wir das Princip der Mittheilung oder Uebertragung der Arbeit für ein Syſtem ſchwingender Molekule aufſtellen, müſſen wir einen Satz über die Beſtimmung der lebendigen Kraft in einem ſolchen Syſteme beweiſen. Es ſeien x', y', z' wieder die Koordinaten eines beliebigen Molekules in Beziehung auf Ebenen, welche durch den Schwerpunkt des Körpers gehen, und ſich mit der mittlern Bewegung bewegen, ferner x, y, z die Koordinaten deſſelben Molekules in Beziehung auf drei feſte Ebenen und ξ, η, ζ die Koordinaten des Schwerpunktes in Beziehung auf dieſe feſten Ebenen; ſo hat man, wenn a, b, c; a', b', c; a'', b'', c'' ihre frühere Bedeutung behalten:

$$x = ax' + by' + cz' + \xi,$$
$$y = a'x' + b'y' + c'z' + \eta,$$
$$z = a''x' + b''y' + c''z' + \zeta.$$

Ferner wollen wir mit d_m die Differenziale für die mittlere Bewegung, d. h. wenn ſich nur die Koſinus a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' ändern, und mit d_r die Differenziale bezeichnen, wenn ſich blos die Koordinaten x', y', z' ändern, d. h. wenn ſich die Molekule blos mit ihren relativen Geſchwindigkeiten in Beziehung auf die beweglichen Ebenen bewegen: ſo haben wir nach der Theorie der Projektionen:

$$dx = d_m x + d_r x + d\xi,$$
$$dy = d_m y + d_r y + d\eta,$$
$$dz = d_m z + d_r z + d\zeta.$$

Um den Ausdruck der Summe der lebendigen Kräfte zu transformiren, muß man dieſe Werthe in die Gleichung:

$$\Sigma \frac{p}{2g}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]=\Sigma p.\frac{v^2}{2g}$$

substituiren. Aber da $d_m x + d_r x$ die Veränderung der Entfernung des Molekules von dem Gewichte p von einer zu der Ebene der yz parallelen und durch den Schwerpunkt des Körpers gehenden Ebene ausdrückt, so ist die Summe $\Sigma p\,(d_m x + d_r x)$ vermöge der Eigenschaften des Schwerpunktes gleich Null, die Glieder:

$$2\Sigma\frac{p(d_m x+d_r x)d\xi}{dt^2},\quad 2\Sigma\frac{p(d_m y+d_r y)d\eta}{dt^2},\quad 2\Sigma\frac{p(d_m z+d_r z)d\zeta}{dt^2},$$

welche in dem Ausdrucke der lebendigen Kraft nach der erwähnten Substitution vorkommen müßten, sind folglich auch Null, und es bleibt blos:

$$\begin{aligned}\Sigma p.\ \frac{v^2}{2g} &= \Sigma\frac{p}{2g}\left[\left(\frac{d_m x}{dt}\right)^2+\left(\frac{d_m y}{dt}\right)^2+\left(\frac{d_m z}{dt}\right)^2\right]\\ &+\Sigma\frac{p}{2g}\left[\left(\frac{d_r x}{dt}\right)^2+\left(\frac{d_r y}{dt}\right)^2+\left(\frac{a_r z}{dt}\right)^2\right]+\\ &+\Sigma\frac{p}{2g}\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right]\\ &+2\Sigma\ \frac{p}{2g}\left[\frac{d_m x d_r x+d_m y d_r y+d_m z d_r z}{dt^2}\right].\end{aligned}$$

Nun hat man aber:

$$\begin{aligned}d_m x &= x'da + y'db + z'dc,\\ d_m y &= x'da' + y'db' + z'dc',\\ d_m z &= x'da'' + y'db'' + z'dc'',\end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned}d_r x &= adx' + bdy' + cdz',\\ d_r y &= a'dx' + b'dy' + c'dz',\\ d_r z &= a''dx' + b''dy' + c''dz'.\end{aligned}$$

Die Größen a, b, c; a' b' c'; a'', b'', c'' sind aber auch durch die Relationen:

$$\begin{aligned}a^2+a'^2+a''^2&=1,\\ b^2+b'^2+b''^2&=1,\\ c^2+c'^2+c''^2&=1,\end{aligned}$$

und:

$$ab + a'b' + a''b'' = 0,$$
$$bc + b'c' + b''c'' = 0,$$
$$ca + c'a' + c''a'' = 0$$

mit einander verbunden, woraus folgt:

$$ada + a'da' + a''da'' = 0,$$
$$bdb + b'db' + b''db'' = 0,$$
$$cdc + c'dc' + c''dc'' = 0,$$

und:

$$adb + a'db' + a''db'' = -(bda + b'da' + b''da''),$$
$$bdc + b'dc' + b''dc'' = -(cdb + c'db' + c''db''),$$
$$cda + c'da' + c''da'' = -(adc + a'dc' + a''dc'').$$

Berücksichtigt man diese Relationen und substituirt die Werthe von $d_m x$, $d_m y$, $d_m z$, $d_r x$, $d_r y$, $d_r z$ in das letzte Glied des Ausdruckes der lebendigen Kraft, worin die drei Produkte $d_m x\, d_r x$, $d_m y\, d_r y$, $d_m z\, d_r z$ vorkommen; so reducirt sich dieses Glied auf:

$$2(adb + a'db' + a''db'')\,\Sigma\,\frac{p}{2g}\,(y'dx' - x'dy'),$$

$$+2(bdc + b'dc' + b''dc'')\,\Sigma\,\frac{p}{2g}\,(z'dy' - y'dz'),$$

$$+2(cda + c'da' + c''da'')\,\Sigma\,\frac{p}{2g}\,(x'dz' - z'dx').$$

Aber vermöge der Eigenschaft der mittlern Bewegung hat man nach §. 47:

$$\Sigma p\,.\,(y'dx' - x'dy') = 0, \quad \Sigma p\,(z'dy' - y'dz') = 0,$$
$$\Sigma p\,(x'dz' - z'dx') = 0.$$

Folglich ist das letzte Glied des Ausdruckes der lebendigen Kraft gleich Null, und man hat blos:

$$\text{(P)} \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma p.\,\frac{v^2}{2g} &= \Sigma\,\frac{p}{2g}\left[\left(\frac{d_m x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d_m y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d_m z}{dt}\right)^2\right] \\ &\quad + \Sigma\,\frac{p}{2g}\left[\left(\frac{d_r x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d_r y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d_r z}{dt}\right)^2\right] \\ &\quad + \Sigma\,\frac{p}{2g}\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right]. \end{aligned} \right.$$

Dieſe Gleichung drückt folgenden merkwürdigen Lehrſatz aus: die Summe der lebendigen Kräfte eines Syſtems beliebig erſchütterter Molekule läßt ſich in drei Theile zerlegen: 1) in die lebendige Kraft, welche ſämmtliche Molekule haben würden, wenn ſie in den gemeinſchaftlichen Schwerpunkt verlegt würden; 2) in die Summe der lebendigen Kräfte, welche dieſe Molekule haben würden, wenn ſie bei ihrer gegenſeitigen Anordnung einen feſten Körper bildeten, welcher um den gemeinſchaftlichen Schwerpunkt die mittlere Bewegung hätte, und 3) in die Summe der lebendigen Kräfte, welche dieſelben Molekule vermöge der relativen Geſchwindigkeiten in Beziehung auf Koordinatenebenen haben würden, welche dieſe mittlere Rotationsbewegung haben.

Wir wollen der Kürze wegen in dem Folgenden die beiden erſten der angeführten Theile der Summe der lebendigen Kräfte zuſammenfaſſen, und unter der mittlern Bewegung ohne weitern Zuſatz den Inbegriff der beiden erſten Bewegungen verſtehen, für welche die lebendige Kraft folglich aus den beiden erſten der angeführten Theile beſteht.

§. 49. Wir wollen nun die Gleichung der lebendigen Kräfte für ein Syſtem von Molekulen betrachten, welche gegenſeitige Einwirkungen auf einander ausüben, und einen Körper bilden, worin beliebig ſchnelle Erſchütterungen oder Schwingungen ſtatt finden können. Es bezeichne **R** die gegenſeitige Einwirkung zwiſchen zwei benachbarten Molekulen, und r deren gegenſeitige Entfernung; ſo iſt die von allen Molekularwirkungen herrührende Arbeit eine Summe von Gliedern von der Form:

$$\Sigma \int R dr,$$

welche ſich, wie wir geſehen haben, auf Null reducirt, wenn die Molekule nicht erſchüttert werden; aber in dem gegenwärtigen Falle iſt dieſe Summe nicht blos nicht Null, ſondern ſie kann ſogar ſehr beträchtlich werden. Gleichwohl kann man, wie wir geſehen haben, den Inbegriff aller ſolcher Glieder hinweglaſſen, das heißt, man braucht die Vibrationsgeſchwindigkeiten der Molekule nicht in Rechnung zu bringen, obgleich ſie ſehr merklich ſein können.

Es bezeichne, wie gewöhnlich, **P** eine der auf gewiſſe oder auf alle Molekule wirkenden äußern Bewegungskräfte und **P′** eine der äußern Widerſtandskräfte; ſo erhält man, wenn man für jedes

Molekul die Gleichung der lebendigen Kräfte bildet, und alle dieſe Gleichungen zuſammenaddirt:

$$(Q) \qquad \Sigma \frac{pv^2}{2g} - \Sigma \frac{pv^2_0}{2g} = \Sigma \int P ds - \int P' ds + \Sigma \int R dr.$$

Es ſeien v_m und v_r die Geſchwindigkeiten eines beliebigen Molekules bei der mittlern und bei der relativen Bewegung, wenn daſſelbe auf Ebenen bezogen wird, welche die mittlere Bewegung haben, und V bezeichne die Geſchwindigkeit des Schwerpunktes; ſo hat man nach dem im vorhergehenden § bewieſenen Satze:

$$(R) \qquad \Sigma \frac{pv^2}{2g} = \Sigma \frac{pv^2_m}{2g} + \Sigma \frac{pv^2_r}{2g} + \Sigma \frac{pV^2}{2g}.$$

Wenn die relative Bewegung nicht ſtatt fände, ſo hätte man blos:

$$\Sigma \frac{pv^2}{2g} = \Sigma \frac{pv^2_m}{2g} + \Sigma \frac{pV^2}{2g},$$

und der erſte Theil dieſer Gleichung drückte alsdann die Summe der lebendigen Kräfte bei der mittlern vollſtändigen oder Totalbewegung aus, d. h. wenn man ſowohl die fortſchreitende, wie die drehende Bewegung in Betracht zieht. Bezeichnet man folglich mit v'_m die Geſchwindigkeit eines Molekules in dieſer mittlern Totalbewegung, ſo kann man die Gleichung (R) auf folgende Form bringen:

$$\Sigma \frac{pv^2}{2g} = \Sigma \frac{pv'^2_m}{2g} + \Sigma \frac{pv^2_r}{2g},$$

worin man, wenn man will, den Accent hinweglaſſen kann, wo ſich alsdann v_m auf die mittlere Totalbewegung bezieht. Die Gleichung (Q) kann alſo auf folgende Form gebracht werden:

$$(S) \qquad \Sigma \frac{pv^2_m}{2g} - \Sigma \frac{pv^2_{m0}}{2g} + \Sigma \frac{pv^2_r}{2g} - \Sigma \frac{pv^2_{r0}}{2g} = \Sigma \int P ds - \Sigma \int P' ds + \Sigma \int R dr.$$

Wenn wir auf die Gleichung der lebendigen Kräfte bei der relativen Bewegung (§. 30) zurückgehen, mit $d_r s$ den von einem Molekule in dieſer relativen Bewegung beſchriebenen unendlich klei-

nen Bogen und mit P_m die nach diesem Bogen gerichtete Komponente der Kraft bezeichnen, welche diesem Molekule die Bewegung ertheilen könnte, welche dasselbe haben würde, wenn es mit den die mittlere Bewegung habenden Axen auf eine unveränderliche Weise fest verbunden wäre; so haben wir:

$$(T)\quad \Sigma\frac{pv^2_r}{2g} - \Sigma\frac{pv^2_r}{2g} = \Sigma\int P d_r s - \Sigma\int P' d_r s - \Sigma\int P_m d_r s + \Sigma\int R dr.$$

Substituiren wir den Werth des ersten Theiles dieser Gleichung (T) in die vorhergehende Gleichung (S) und setzen $d_m s + d_r s$ für ds, so kommt:

$$(U)\quad \Sigma\frac{pv^2_m}{2g} - \Sigma\frac{pv^2_{m_0}}{2g} = \Sigma\int P d_m s - \Sigma\int P' d_m s + \Sigma\int P_m dr s.$$

Aus dieser Gleichung sind also die von den Molekularwirkungen herrührenden Glieder $\Sigma\int R dr$ und die von den relativen Geschwindigkeiten herrührenden verschwunden, so daß man folgenden Lehrsatz hat:

Auf ein System von Molekulen, welche mit beliebig großen relativen Geschwindigkeiten erschüttert werden, kann man das Princip der lebendigen Kräfte oder das der Uebertragung der Arbeit anwenden, wenn man blos die mittlere Bewegung in Betracht zieht, ohne weder auf die relativen Geschwindigkeiten der Molekule, noch auf ihre gegenseitigen Einwirkungen Rücksicht zu nehmen, obgleich diese Kräfte in Folge der Erschütterungen sehr merkliche Quantitäten Arbeit bewirken können, und man braucht zu den von den äußern Kräften herrührenden Quantitäten Arbeit nur die hinzuzufügen, welche herrühren würden: 1) von fingirten Kräften, die jedem als frei betrachteten Molekule die mittlere Bewegung ertheilen könnten, und 2) von den relativen Verrückungen der Molekule in Beziehung auf die die mittlere Bewegung habenden Koordinatenebenen.

§. 50. Wir wollen nun zeigen, daß, wenn die Molekule nur wenig erschüttert werden, so daß sich die auf die ganze Ausdehnung des Körpers erstreckenden Integrale nicht merklich ändern, der durch $\Sigma\int P_m d_r s$ ausgedrückte Theil der Arbeit, welcher die Korrektion ausdrückt, die man anbringen muß, um von dem Falle, wo die Molekule nicht erschüttert werden, zu dem überzugehen, wo

sie erschüttert werden, vernachlässigt werden kann, und man folglich die Gleichung der lebendigen Kräfte, oder das Princip der Uebertragung der Arbeit für die mittlere Bewegung anwenden kann, wie es auch bei den Anwendungen geschieht, ohne daß die schwingenden Bewegungen der Molekule und die davon herrührenden Wirkungen einen merklichen Einfluß auf die Rechnung haben können.

Es seien X_m, Y_m, Z_m die rechtwinkligen Komponenten der Kraft, deren nach $d_r s$ gerichtete Komponente P_m ist; so hat man:

$$X_m = \frac{p}{g} \cdot \frac{d^2 m x}{dt^2}, \quad Y_m = \frac{p}{g} \cdot \frac{d^2 m y}{dt^2}, \quad Z_m = \frac{p}{g} \cdot \frac{d^2 m z}{dt^2},$$

folglich:

$$X_m dt^2 = \frac{p}{g} (x' d^2 a + y' d^2 b + z' d^2 c),$$

$$Y_m dt^2 = \frac{p}{g} (x' d^2 a' + y' d^2 b' + z' d^2 c'),$$

$$Z_m dt^2 = \frac{p}{g} (x' d^2 a'' + y' d^2 b'' + z' d^2 c'').$$

Die Projektionen von $d_r s$ auf dieselben festen Axen sind:

$$a dx' + b dy' + c dz',$$
$$a' dx' + b' dy' + c' dz',$$
$$a'' dx' + b'' dy' + c'' dz',$$

und da das Arbeitselement $P_m d_r s$ die Summe der komponirenden Arbeitselemente ist; so kommt:

$$P_m d_r s\, dt^2 = \frac{p}{g} (x' d^2 a + y' d^2 b + z' d^2 c)(a dx' + b dy' + c dz')$$
$$+ \frac{p}{g} (x' d^2 a' + y' d^2 b' + z' d^2 c')(a' dx' + b' dy' + c' dz')$$
$$+ \frac{p}{g} (x' d^2 a'' + y' d^2 b'' + z' d^2 c'')(a'' dx' + b'' dy' + c'' dz').$$

Verrichtet man die Multiplikationen und bildet die Summe der ähnlichen Gleichungen für alle Molekule des bewegten Körpers; so erhält man, wenn man die Faktoren, welche nicht von den relativen Koordinaten x', y', z' abhängen und für alle Punkte des Körpers dieselben bleiben, aus dem Summenzeichen Σ herausgesetzt:

$$
\text{(V)}\quad
\begin{cases}
\Sigma P_m d_r s\, dt^2 = (ad^2a + a'd^2a' + a''d^2a'')\,\Sigma\frac{p}{g}\,x'dx' \\
\qquad + (bd^2a + b'd^2a' + b''d^2a'')\,\Sigma\frac{p}{g}\,x'dy' \\
\qquad + (cd^2a + c'd^2a' + c''d^2a'')\,\Sigma\frac{p}{g}\,x'dz' \\
\qquad + (ad^2b + a'd^2b' + a''d^2b'')\,\Sigma\frac{p}{g}\,y'dx' \\
\qquad + (bd^2b + b'd^2b' + b''d^2b'')\,\Sigma\frac{p}{g}\,y'dy' \\
\qquad + (cd^2b + c'd^2b' + c''d^2b'')\,\Sigma\frac{p}{g}\,y'dz' \\
\qquad + (ad^2c + a'd^2c' + a''d^2c'')\,\Sigma\frac{p}{g}\,z'dx' \\
\qquad + bd^2c + b'd^2c' + b''d^2c'')\,\Sigma\frac{p}{g}\,z'dy' \\
\qquad + (cd^2c + c'd^2c' + c''d^2c'')\,\Sigma\frac{p}{g}\,z'dz'.
\end{cases}
$$

Zur Vereinfachung dieſer Werthe, wollen wir uns erinnern, daß:

$$
\begin{aligned}
ada + a'da' + a''da'' &= 0, \\
bdb + b'db' + b''db'' &= 0, \\
cdc + c'dc' + c''dc'' &= 0,
\end{aligned}
$$

folglich:

$$
\begin{aligned}
ad^2a + a'd^2a' + a''d^2a'' &= -(da^2 + da'^2 + da''^2), \\
bd^2b + b'd^2b' + b''d^2b'' &= -(db^2 + db'^2 + db''^2), \\
cd^2c + c'd^2c' + c''d^2c'' &= -(dc^2 + dc'^2 + dc''^2)
\end{aligned}
$$

iſt, und der Kürze wegen ſetzen:

$$
\begin{aligned}
bda + b'da' + b''da'' &= hdt = -(adb + a'db' + a''db''), \\
cdb + c'db' + c''db'' &= kdt = -(bdc + b'dc' + b''dc''), \\
adc + a'dc' + a''dc'' &= ldt = -(cda + c'da' + c''da'');
\end{aligned}
$$

ſo ergiebt ſich durch Differenzirung:

$$bd^2a + b'd^2a' + b''d^2a'' = dhdt - (dbda + db'da' + db''da''),$$
$$cd^2b + c'd^2b' + c''d^2b'' = dkdt - (dcdb + dc'db' + dc''db''),$$
$$ad^2c + a'd^2c' + a''d^2c'' = dldt - (dadc + da'dc' + da''dc''),$$
$$ad^2b + a'd^2b' + a''d^2b'' = -dhdt - (dadb + da'db' + da''db''),$$
$$bd^2c + b'd^2c' + b''d^2c'' = -dkdt - (dbdc + db'dc' + db''dc''),$$
$$cd^2a + c'd^2a' + c''d^2a'' = -dldt - (dcda + dc'da' + dc''da'').$$

Führen wir dieſe Werthe in die Gleichung (V) ein, ſo kommt:

$$(X)\quad \left\{\begin{aligned}
\Sigma P_m d_r s dt^2 = &-(da^2 + da'^2 + da''^2)\Sigma\frac{p}{g}x'dx' \\
&-(db^2 + db'^2 + db''^2)\Sigma\frac{p}{g}y'dy' \\
&-(dc^2 + dc'^2 + dc''^2)\Sigma\frac{p}{g}z'dz' \\
&-(dadb + da'db' + da''db'')\Sigma\frac{p}{g}(x'dy' + y'dx') \\
&-(dbdc + db'dc' + db''dc'')\Sigma\frac{p}{g}(y'dz' + z'dy') \\
&-(dadc + da'dc' + da''dc'')\Sigma\frac{p}{g}(z'dx' + x'dz') \\
&+dhdt\,\Sigma\frac{p}{g}(x'dy' - y'dx') \\
&+dkdt\,\Sigma\frac{p}{g}(y'dz' - z'dy') \\
&+dldt\,\Sigma\frac{p}{g}(z'dx' - x'dz'),
\end{aligned}\right.$$

und wenn wir die Summe $\Sigma P_m d_r s$ auf alle Molekule des Körpers erſtrecken; ſo haben wir, da ſich die Koordinaten x', y', z' auf die die mittlere Bewegung habenden Ebenen beziehen:

$$\Sigma\frac{p}{g}(x'dy' - y'dx') = 0,$$
$$\Sigma\frac{p}{g}(y'dz' - z'dy') = 0,$$
$$\Sigma\frac{p}{g}(z'dx' - x'dz') = 0,$$

so daß die drei letzten Glieder aus dem vorhergehenden Ausdrucke verschwinden, und man kann daher setzen:

$$(Y)\quad \begin{cases} \Sigma P_m d_r s = -\left[\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\left(\frac{da'}{dt}\right)^2+\left(\frac{da''}{dt}\right)^2\right]\Sigma\,\frac{p}{2g}\,d(x'^2) \\ \qquad -\left[\left(\frac{db}{dt}\right)^2+\left(\frac{db'}{dt}\right)^2+\left(\frac{db''}{dt}\right)^2\right]\Sigma\,\frac{p}{2g}\,d(y'^2) \\ \qquad -\left[\left(\frac{dc}{dt}\right)^2+\left(\frac{dc'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dc''}{dt}\right)^2\right]\Sigma\,\frac{p}{2g}\,d(z'^2) \\ \qquad -2\left(\frac{dadb+da'db'+da''db''}{dt^2}\right)\Sigma\,\frac{p}{2g}\,d(x'y') \\ \qquad -2\left(\frac{dbdc+db'dc'+db''dc'}{dt^2}\right)\Sigma\,\frac{p}{2g}\,d(y'z') \\ \qquad -2\left(\frac{dadc+da'dc'+da''dc''}{dt^2}\right)\Sigma\,\frac{p}{2g}\,d(z'x'). \end{cases}$$

Die zu bestimmende Korrektion ist folglich:

$$\begin{aligned} \int \Sigma P_m d_r s = &-\int\left[\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\left(\frac{da'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dt''}{dt}\right)^2\right]d\Sigma\,\frac{px'^2}{2g} \\ &-\int\left[\left(\frac{db}{dt}\right)^2+\left(\frac{db'}{dt}\right)^2+\left(\frac{db''}{dt}\right)^2\right]d\Sigma\,\frac{py'^2}{2g} \\ &-\int\left[\left(\frac{dc}{dt}\right)^2+\left(\frac{dc'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dc''}{dt}\right)^2\right]d\Sigma\,\frac{pz'^2}{2g} \\ &-2\int\left(\frac{dadb+da'db'+da''db''}{dt^2}\right)d\Sigma\,\frac{px'y'}{2g} \\ &-2\int\left(\frac{dbdc+db'dc'+db''dc''}{dt^2}\right)d\Sigma\,\frac{py'z'}{2g} \\ &-2\int\left(\frac{dadc+da'dc'+da''dc''}{dt^2}\right)d\Sigma\,\frac{pz'x'}{2g}. \end{aligned}$$

Da sich die Molekule nach der Voraussetzung in Beziehung auf die Ebenen, welche die mittlere Bewegung haben, wenig aus ihren ursprünglichen Lagen entfernen, so ändern sich die differenzirten Summen Σ während der Bewegung sehr wenig. Bezeichnen wir also eine dieser Summen mit A und den mit der Zeit veränderlichen Koefficienten unter dem Integralzeichen $\int$ mit P, so sind diese Integrale von der Form:

$$\int P\,dA.$$

Es ſeien t_1, t_0 die Grenzen in Beziehung auf die Zeit, und P_0A_0, P_1A_1 die Werthe der Größe PA für die Grenzen des Integrales, ſo hat man, wenn man theilweiſe integrirt:

$$\int_{t_0}^{t_1} PdA = P_1A_1 \quad P_0A_0 - \int_{t_0}^{t_1} AdP.$$

Da ſich P ſtetig ändert, ſo kann man das Integral immer in eine endliche und zwar ziemlich kleine Anzahl von Theilen zerlegen, für welche dP das Zeichen nicht ändert. Bezeichnet alſo A' einen mittlern Werth von A für das Intervall von t_0 bis t_1, ſo hat man, da P das Zeichen nicht ändert:

$$\int_{t_0}^{t_1} AdP = A'(P_1 - P_0);$$

aber da A eine Größe iſt, welche ſich nicht merklich ändert, weil ſich die Molekule nach der Vorausſetzung nur ſehr wenig von ihren urſprünglichen Lagen entfernen; ſo kann man ſetzen:

$$A_1 = A_0 + \alpha_1,$$
$$A' = A_0 + \alpha',$$

wo α_1 und α' ſehr kleine Größen ſind.

Man hat demnach:

$$\int_{t_0}^{t_1} PdA = P_1(A_0 + \alpha_1) - P_0A_0 - (A_0 + \alpha')(P_1 - P_0)$$
$$= \alpha_1 P_1 - \alpha'(P_1 - P_0),$$

und da α_1, α' ſehr kleine Größen ſind, ſo iſt auch das Integral $\int_{t_0}^{t_1} PdA$ eine ſehr kleine Größe. Folglich ſind die ſechs Integrale, welche den Werth von $\Sigma\int Pp_m d_r s$ bilden, alle für jede Dauer der Bewegung, während welcher die Differenziale der ſich auf die mittlere Bewegung beziehenden Größen das Zeichen nicht ändern, ſehr klein, und da man die Dauer der Bewegung immer in eine endliche Anzahl ſolcher Intervalle zerlegen kann; ſo folgt, daß die Größe $\Sigma\int P_m d_r s$ vernachläſſigt werden kann, wenn die Verrückungen der Molekule gegen die Ebenen, welche die mittlere Bewegung haben, ſehr klein ſind. Es findet alſo in dieſer Vorausſetzung folgender Satz ſtatt:

Wenn die Molekule eines feſten Körpers relative Geſchwindigkeiten gegen einander bekommen, und ſie entfernen ſich bei dieſen relativen Bewegungen von ihren urſprünglichen Lagen nur um Größen,

welche gegen die Dimensionen des Körpers sehr klein sind; so findet das Princip der Uebertragung der Arbeit oder die Gleichung der lebendigen Kräfte noch statt, wenn man nur die den mittlern Bewegungen entsprechenden Geschwindigkeiten und beschriebenen Wege in Betracht zieht.

Princip der Uebertragung der Arbeit für eine beliebige Maschine mit Berücksichtigung der Reibung.

§. 51. Betrachten wir nun eine beliebige Maschine, welche aus einer Verbindung von festen Körpern besteht, die einander während der Bewegung berühren. Der vorhergehende Lehrsatz ist auf jeden einzelnen Maschinentheil anwendbar; aber zu den äußern Kräften, welche in den Arbeitsquantitäten $\Sigma\int P d_m s$ vorkommen müssen, sind noch die gegenseitigen Einwirkungen zu zählen, welche bei der Berührung der Körper zwischen den benachbarten Molekulen entstehen. Denn es verhält sich mit diesen Wirkungen nicht so, wie mit den zwischen den Molekulen desselben Körpers statt findenden; sie verschwinden nicht aus der definitiven Gleichung der lebendigen Kräfte, sondern es entspricht jeder Berührung und jedem Körper ein Glied von der Form:

$$\Sigma\int P d_m s,$$

welches auch durch $\Sigma\int R d_m r$ ausgedrückt werden kann, wo das Differenzial $d_m r$ nur so genommen ist, daß sich die Molekule des Körpers bewegen. Bei der Addition der Gleichungen der lebendigen Kräfte für die beiden einander berührenden Körper braucht man nur die beiden Differenziale $d_m r$ für die beiden Molekule, welche die Wirkung R auf einander ausüben, zusammen zu addiren, und die Summe wird wieder ausgedrückt durch:

$$\Sigma\int R d_m r,$$

wo $d_m r$ hier das Totaldifferenzial der Entfernung r zwischen den Molekulen während der gleichzeitigen Bewegung der beiden einander berührenden Körper bezeichnet.

Um den Werth zu bestimmen, welchen dieses Glied annehmen muß, wollen wir bemerken, daß, da jede Wirkung R eine Funktion der gegenseitigen Entfernung r der beiden Molekule ist, und folglich denselben Werth wieder annimmt, wenn r während des Vorüberganges des einen Molekules vor dem andern wieder denselben Werth bekommt, das nicht wie das Vorhergehende für die mittlere Bewegung genommene Integral, sondern das für die wirkliche Bewegung, wobei auch die Schwingungen der Molekule in Betracht gezogen werden, genommene Integral $\int R dr$ aus zwei

Theilen beſteht, welche einander gleich und von entgegengeſetztem Zeichen ſind, ſo daß man ſetzen kann:

$$\int R dr = 0.$$

Da aber die Entfernung r eine Funktion der Koordinaten der betrachteten Molekule beider Körper in Beziehung auf die die mittlere Bewegung habenden Ebenen und der Koſinuſſe der Winkel iſt, welche dieſe beweglichen Ebenen mit den feſten Axen bilden; ſo iſt das Totaldifferenzial dr die Summe der Partialdifferenziale $d_m r$, $d_r r$, wovon das eine für die mittlere Bewegung, d. h. wenn ſich nur die erwähnten Koſinuſſe ändern, und das andere für die relative Bewegung, d. h. wenn man nur die Koordinaten der Molekule in Beziehung auf die beweglichen Ebenen variiren läßt, genommen iſt. Man hat mithin:

$$dr = d_m r + d_r r,$$

und folglich:

$$\Sigma \int R d_m r + \Sigma R d_r r = 0.$$

Es iſt alſo:

$$\Sigma \int R d_m r = - \Sigma R d_r r.$$

Das Differenzial $d_r r$ läßt ſich in zwei Theile zerlegen, wovon ſich jeder nur auf die relative Bewegung der Molekule eines einzigen Körpers bezieht. Bezeichnen wir dieſe Partialdifferenziale mit $d'_r r$ und $d''_r r$, ſo haben wir:

$$\Sigma \int R d_r r = \Sigma \int R d'_r r + \int R d''_r r,$$

und folglich:

$$\Sigma \int R d_m r = - \Sigma \int R d'_r r - \Sigma \int R d''_r r.$$

Wir wollen nun jedes der Glieder:

$$\Sigma \int R d'_r r \text{ und } \Sigma \int R d''_r r$$

näher unterſuchen, wobei wir aber, da beide von einerlei Natur ſind, nur eins derſelben:

$$\Sigma \int R d'_r r$$

zu betrachten brauchen.

Das Differenzial $d'_{,r}$ iſt in dieſem Ausdrucke ſo genommen, daß ſich nur eins der beiden Molekule bewegt, und zwar für die relative Bewegung, wobei wir bemerken wollen, daß ſich das betrachtete Molekul vor der Einwirkung der Kraft R unter dem Einfluſſe der von allen benachbarten Molekulen ausgeübten Wirkungen im Gleichgewichte befand. Durch die Einwirkung der neuen Kraft R wird dieſes Molekul aus ſeiner Gleichgewichtslage entfernt, aber die von den benachbarten Molekulen deſſelben Körpers in Folge dieſer Verrückung auf daſſelbe ausgeübten Wirkungen ſtreben es in ſeine urſprüngliche Lage zwar nicht direkt, aber vermöge einer Reihe von Schwingungen um dieſe Lage des Gleichgewichtes zurückzuführen.

Für die relative und ſchwingende Bewegung der durch die bei der Berührung ſtattfindenden Wirkungen auf dieſe Weiſe verrückten Molekule kann man das in §. 30 für die relativen Bewegungen aufgeſtellte Princip der lebendigen Kräfte anwenden. Die wegen der mittlern Bewegung jedes Körpers einzuführenden fingirten Kräfte geben nur eine Quantität Arbeit, welche gegen die von den bei der geringſten Verrückung der Molekule eine beträchtliche Intenſität erlangenden gegenſeitigen Einwirkungen herrührende Quantität Arbeit ganz unmerklich iſt, und es verhält ſich alſo gerade ſo, wie in dem Falle eines ruhenden Körpers, auf deſſen Molekule an einem Theile der Oberfläche, oder in einer geringen Entfernung von derſelben Kräfte R wirken, welche ſie aus ihrer Lage des Gleichgewichtes entfernen. Durch dieſe Verrückungen werden die gegenſeitigen Einwirkungen zwiſchen den Molekulen deſſelben Körpers geändert, und wir wollen mit R′ die Reſultante aus den neuen auf ein Molekul wirkenden Kräften bezeichnen, welche für die Gleichgewichtslage des Molekules Null iſt. Ferner bezeichnen $\Sigma\int R'dr'$ die von dieſen neuen Kräften oder Wirkungen herrührenden Quantitäten Arbeit, v' die relative Geſchwindigkeit irgend eines der betrachteten Molekule und p das Gewicht deſſelben; ſo hat man nach dem Principe der lebendigen Kräfte der relativen Bewegungen, und weil bei dem Beginne der Wirkung der äußern Kraft R jedes Molekul keine relative Geſchwindigkeit hat:

$$\Sigma\,\frac{pv'^2}{2g} = \Sigma\int R d'_{,r} + \Sigma\int R'dr',$$

oder:

$$\Sigma\int R d'_{,r} = \frac{\Sigma pv'^2}{2g} - \Sigma\int R'dr'.$$

Die den Wirkungen R′ entſprechende Arbeit kann nur eine Widerſtandsarbeit ſein, wenn, wie wir vorausſetzen, die Molekule ſich vor ihrer Verrückung in der Lage des ſtabilen Gleichge-

wichtes befanden, welche sie wieder anzunehmen streben; denn die hervorgerufenen Kräfte haben nach den Koordinatenaxen Komponenten, welche nach diesen Axen zuerst in einem der Verrückung entgegengesetzten Sinne wirken, weil sonst kein stabiles Gleichgewicht statt gefunden hätte. Diese Komponenten können folglich nur Quantitäten Widerstandsarbeit hervorbringen, selbst wenn man nach der Periode der Entfernung aus der Gleichgewichtslage eine Periode der Rückkehr betrachtet; denn während dieser letzten Periode würde doch die Bewegungsarbeit nicht größer sein können, als die während der ersten Periode hervorgebrachte Widerstandsarbeit.

Die Glieder $\Sigma\int R'dr'$ sind also negativ; folglich besteht die Größe $\Sigma\int Rd'_{,r}$ aus zwei positiven Theilen, ist also immer positiv, und dasselbe gilt für die sich auf den zweiten Körper beziehende Größe $\Sigma\int Rd''_{,r}$.

Die von den Reibungen $\Sigma\int Rd_m r$ herrührende Arbeit, welche $= -\Sigma\int Rd'_{,r} - \Sigma\int Rd''_{,r}$ ist, wird also durch eine negative Größe ausgedrückt, und erscheint immer als ein Verlust. Insofern also die Wirkung der Reibung darin besteht, die Molekule an der Berührungsstelle, und folglich successive auch alle übrigen Molekule in schwingende Bewegungen zu versetzen, muß man eine Widerstandsarbeit einführen, wenn man nur die mittlern Bewegungen der beiden einander berührenden Körper in Betracht zieht, d. h. es geht immer ein Theil der Bewegungsarbeit durch diese Schwingungen verloren, ohne daß die mittlern Bewegungen, welche man allein in der Praxis in Rechnung bringen muß, vortheilhaft verändert würden.

Aus dem vorhin Gesagten folgt: daß das Princip der Uebertragung der Arbeit für eine eine beliebige Maschine bildende Verbindung fester Körper statt findet, was für Schwingungen in diesen Körpern auch durch die Reibungen in den Berührungspunkten entstehen mögen, wofern man nur die mittlern Bewegungen in Rechnung bringt, und die den Reibungen entsprechenden Quantitäten Widerstandsarbeit in Betracht zieht.

Bestimmung der durch die Reibung konsumirten Quantität Arbeit.

§. 52. Die Berechnung dieser Quantitäten Arbeit läßt sich durch die folgenden Betrachtungen sehr vereinfachen. Die durch die Reibungen verloren gegangene Arbeit besteht aus Gliedern von der Form $\Sigma\int Rd_m r$, wo $d_m r$ die Aenderung der gegenseitigen Entfernung zweier Molekule bezeichnet, welche zwei verschiedenen Körpern angehören und sehr nahe an der Berührungsoberfläche liegen, indem diese Aenderung nur für die mittlern Bewegungen genommen ist. Diese Größe, so wie alle von den gegenseitigen Einwirkungen herrührenden Quantitäten Arbeit, ändern sich nicht,

wenn man dem Systeme der beiden einander berührenden Körper eine gemeinschaftliche Bewegung ertheilt, welche der mittlern Bewegung des einen der beiden Körper gleich und entgegengesetzt ist, so daß diese Bewegung aufgehoben und der Körper in den Zustand der Ruhe versetzt wird. Die Berechnung der Glieder $\Sigma\int R d_m r$ wird alsdann sehr erleichtert, weil man die Aenderung $d_m r$ nur für die Bewegung eines Körpers zu betrachten hat. Zur Vereinfachung dieser Rechnung wollen wir bemerken, daß man $\int P d_m s$ für $\int R d_m r$ setzen kann, wo $d_m s$ der Weg ist, welchen ein Molekul des beweglichen Körpers, auf welches von einem andern Molekule des benachbarten unbeweglich gewordenen Körpers eine Wirkung R ausgeübt wird, mit der mittlern Bewegung beschreibt, und wo P die Komponente der Kraft R in dem Sinne des Weges $d_m s$ ist. Sehr nahe an der Berührungsoberfläche sind aber die Geschwindigkeiten der mittlern Bewegung der beweglichen Körper an der Berührungsoberfläche tangent; denn selbst dann, wenn außer der gleitenden Bewegung noch eine zweite rollende Bewegung statt fände, könnte diese letztere als eine dem Körper ertheilte Rotationsbewegung um eine Tangente an der Berührungsfläche betrachtet werden, und gäbe auf dieser Tangente nur Geschwindigkeiten, welche gleich Null und in allen benachbarten Punkten des Berührungspunktes unmerklich sind, so daß also $d_m s$ ein in tangentialer Richtung an den Berührungsflächen beschriebener Weg ist. Wenn man die Glieder $\int P d_m s$ für alle Molekule, welche nahe an den Berührungsflächen sämmtlich gleiche Geschwindigkeiten haben, zusammennimmt; so ist $d_m s$ ein gemeinschaftlicher Faktor, und die Summe $\Sigma\int P d_m s$ wird $= \int d_m s \Sigma P$, wodurch die Quantität Arbeit ausgedrückt wird, welche einer Totalkraft ΣP entspricht, die an einem fingirten Punkte angebracht ist, welcher in der Zeit dt einen Weg $d_m s$ beschreibt. Die Kraft ΣP ist die Totalreibung für das System von Punkten, welche als dieselbe Geschwindigkeit habend, betrachtet werden, und $d_m s$ drückt die Größe aus, um welche der eine Körper auf dem andern in der unendlich kleinen Zeit dt fortgleitet. Die durch die Reibung zwischen zwei Maschinenbestandtheilen konsumirte Quantität Arbeit wird also im Allgemeinen durch ein Integral ausgedrückt, welches sich auf die Dauer der betrachteten Bewegung erstreckt, und dessen Element das Produkt aus der Totalreibung für alle Berührungspunkte, welche gleiche und parallele Geschwindigkeiten haben und aus dem Längenelemente ist, um welches der eine Körper auf dem andern hingleitet.

Der absolute Werth des von der Reibung herrührenden Verlustes an Arbeit kann nur durch Experimente bestimmt werden, und um dieselben anzustellen, braucht man nur zwei Körper mit einander in Berührung zu bringen, und dem einen dieser beiden Körper auf dem andern ruhenden eine gleichförmige Bewegung zu ertheilen. Da in diesem Falle jeden Augenblick zwischen der

dem beweglichen Körper mitgetheilten Quantität Arbeit, und der von den Molekularwirkungen, welche bei der Berührung ſtatt finden, allein herrührenden Widerſtandsarbeit Gleichheit ſtatt findet; ſo iſt, wenn man die Bewegungsarbeit kennt, auch die von der Reibung herrührende Widerſtandsarbeit bekannt. Auf dieſe Weiſe hat man gefunden, daß man dieſe Widerſtandsarbeit als von einer Widerſtandskraft F, der Reibung, welche in dem Berührungspunkte an dem beweglichen Körper und nach dem entgegengeſetzten Sinne ſeiner gleitenden Bewegung auf dem unbeweglichen Körper wirkt, herrührend betrachten kann. Man hat gefunden, daß die Intenſität dieſer Kraft nahezu dem bei der Berührung beider Körper ſtattfindenden Normaldrucke proportional und zugleich von der Geſchwindigkeit der Bewegung unabhängig iſt, wenigſtens bis zu Geſchwindigkeiten von ungefähr drei Meter in der Sekunde.

Wir werden der Berechnung der Reibungen, welche eine ſo wichtige Rolle in den Maſchinen ſpielen, ſpäter ein beſonderes Kapitel widmen.

Vom Stoße.

§. 53. Wenn zwiſchen zwei Körperſyſtemen, oder zwei beliebigen Maſchinen ein Stoß ſtatt findet, ſo kann man nicht mehr annehmen, daß die Molekule deſſelben Körpers ihre urſprünglichen gegenſeitigen Entfernungen beibehalten, ſondern es entſtehen durch den Stoß Erſchütterungen der Molekule, worauf die Theorie Rückſicht nehmen muß. Bei feſten Körpern kann man jedoch annehmen, daß die Formveränderungen und überhaupt die gegenſeitigen Verrückungen der Molekule jedes Körpers während der ſehr kurzen Zeit, welche zu den Geſchwindigkeitsveränderungen erfordert wird, ſehr gering geweſen ſind, d. h. man kann annehmen, daß die Mittheilung der Bewegung in einer ſehr kurzen Zeit erfolgt.

Betrachtet man die Bewegung jedes Molekules während der ſehr kurzen Dauer des Stoßes, während welcher eine plötzliche Veränderung ſeiner Geſchwindigkeit ſtatt findet, ſo muß man annehmen, daß auf dieſes Molekul alle benachbarten Molekule und auch äußeren Kräfte, z. B. die Schwere, wirken. Wenn man für die virtuelle Geſchwindigkeit jedes Molekules diejenige nimmt, welche ſtatt finden würde, wenn keine Erſchütterungen der Molekule ſtatt fänden, oder wenn die Molekule jedes Körpers ihre urſprünglichen gegenſeitigen Entfernungen beibehielten; ſo iſt, wie auch bereits bemerkt worden, einleuchtend, daß die virtuellen Momente der gegenſeitigen Einwirkungen der Molekule deſſelben Körpers einander aufheben, ſo daß nur die der äußern Kräfte, welche wir mit $P\delta p$ bezeichnen wollen, und die der zwiſchen den in der Nähe des Berührungspunktes zweier verſchiedener Körper liegenden Molekulen ſtatt findenden Einwirkungen übrig bleiben. Be-

zeichnet man dieſe letzten virtuellen Momente mit $R\delta r$, ſo hat man folglich:

$$\Sigma \frac{p}{g}\left(\frac{du}{dt}\delta x+\frac{dv}{dt}\delta y+\frac{dw}{dt}\delta z\right)=\Sigma P\delta p+\Sigma R\delta r.$$

Aber nach der Natur der gewählten virtuellen Geſchwindigkeiten δx, δy, δz hängen dieſelben für jedes Molekul nur von der Lage der augenblicklichen Rotationsaxe des als vollkommen feſt betrachteten Syſtemes, wozu das Molekul gehört, und von der Lage dieſes Molekules gegen dieſe Axe ab. Man kann aber dieſe Axe während der kurzen Dauer des Stoßes als unveränderlich betrachten, und da die Molekule nach der Vorausſetzung während dieſer Dauer wenig verrückt werden; ſo ändern ſich auch die virtuellen Geſchwindigkeiten ſehr wenig, obgleich die wirklichen Geſchwindigkeiten beträchtlich geändert werden. Man kann folglich die vorhergehende Gleichung für die Dauer des Stoßes in Beziehung auf die Zeit integriren, ohne δx, δy, δz variiren zu laſſen. Bezeichnet man alſo mit u_0, v_0, w_0 und u_1, v_1, w_1 reſp. die Geſchwindigkeiten vor und nach dem Stoße, ſo hat man:

$$\Sigma \frac{p}{g}[(u_1-u_0)\delta x+(v_1-v_0)\delta y+(w_1-w_0)\delta z]=\Sigma\int P\delta p dt+\Sigma\int R\delta r dt.$$

Quantität oder Größe der Bewegung.

Das Produkt $\frac{p}{g}u$ aus der Maſſe und Geſchwindigkeit eines materiellen Punktes oder eines Körpers wird die Quantität oder Größe der Bewegung deſſelben genannt, und iſt das in Beziehung auf die Zeit genommene Integral einer auf den materiellen Punkt oder Körper wirkenden Kraft, ſo daß unter der Quantität oder Größe der Bewegung im Allgemeinen ein Integral wie $\int P dt$ zu verſtehen iſt, wo P eine Kraft und dt ein unendlich kleines Element der Zeit bezeichnet.

Da die äußern Kräfte P, welche gewöhnlich in dem Gewichte der Molekule beſtehen, allein die Geſchwindigkeiten nicht plötzlich ändern können und gegen die Molekularwirkungen, welche dieſe plötzlichen Geſchwindigkeitsveränderungen bewirken, ſehr klein ſind; ſo können ſie in einer ſehr kurzen Zeit nur Glieder hervorbringen, welche gegen den erſten Theil der letzten Gleichung unmerklich ſind, ſo daß man ſie vernachläſſigen, und folglich ſetzen kann:

$$\Sigma \frac{p}{g}[(u_1-u_0)\delta x+(v_1-v_0)\delta y+(w_1-w_0)\delta z]=\Sigma\int \delta R r dt.$$

Wenn man die virtuellen Geſchwindigkeiten ſchicklich wählt und ſie für jeden Körper wieder ſo annimmt, als wenn derſelbe

vollkommen fest wäre; so kann man den zweiten Theil der letzten Gleichung so umgestalten, daß nur Tangentialkräfte darin vorkommen. Denn obgleich die Körper während des Stoßes zusammengedrückt werden können, und folglich die Normalgeschwindigkeiten an den Berührungsflächen nicht gleich sind, so kann man bei der Wahl der virtuellen Geschwindigkeiten die Körper doch als vollkommen fest betrachten und von der wirklichen Zusammendrückung desselben abstrahiren, wenn man annimmt, daß die Körper in den Berührungspunkten aneinander hingleiten. Alsdann ist für zwei benachbarte Molekule, zwischen welchen die gegenseitige Einwirkung R statt findet, die nach der Normale gerichtete Komponente des virtuellen Momentes δr gleich Null, die virtuelle Arbeit der Kraft R reducirt sich folglich auf die der Komponente F nach der Berührungsebene und der zweite Theil der vorhergehenden Gleichung kann auf die Form:

$$\Sigma \int \mathrm{F}\delta f . \cos(\mathrm{F}\delta f) . dt$$

gebracht werden, wo das virtuelle Moment δf hier in der virtuellen und nicht in der wirklichen Bewegung genommen ist. Hiernach hat man:

$$\Sigma \frac{p}{g} [(u_1 - u_0)\delta x + (v_1 - v_0)\delta y + (w_1 - w_0)\delta z] = \Sigma \int \mathrm{F}\delta f . \cos(\mathrm{F}\delta f) . dt;$$

aber wenn die virtuelle Bewegung so gewählt ist, daß die einander berührenden Körper mit, oder ohne Rollen, aber ohne Drehung, aneinander hingleiten, so sind die virtuellen Momente δf für alle einander berührenden Molekule und für die ganze Dauer der Berührung nahezu einander gleich. Das virtuelle Element δf ist also von der Lage des betrachteten Molekules unabhängig, und da dasselbe, wie alle virtuellen Geschwindigkeiten, auch von der Zeit unabhängig ist, weil wir voraussetzen, daß der Stoß sehr schnell erfolgt; so tritt dasselbe aus dem Integralzeichen $\int$ und aus einem Theile der Summe Σ heraus, und man hat folglich:

$$\Sigma \frac{p}{g} [(u_1 - u_0)\delta x + (v_1 - v_0)\delta y + (w_1 - w_0)\delta z] = \Sigma \delta f . \Sigma \int \mathrm{F} \cos(\mathrm{F}\delta f) . dt,$$

wo sich das erste Summenzeichen Σ im zweiten Theile dieser Gleichung auf die verschiedenen Berührungspunkte des Körpers und das zweite auf alle um denselben Berührungspunkt herumliegenden benachbarten Molekule bezieht. Man kann alsdann der Kürze wegen für jeden Berührungspunkt für die Summe $\Sigma \int \mathrm{F} \cos(\mathrm{F}\delta f) dt$ einen einzigen Buchstaben F setzen, welcher die einer Tangentialkraft, die nach der Erfahrung die Resultante aus allen von der Berührung herrührenden und nach diesem Sinne gerichteten Wirkungen ist, entsprechende Quantität Bewe-

gung ausdrückt und die Summe der Quantitäten Bewegung ist, welche den während des Stoßes stattfindenden Reibungen entspricht. Wenn man das Summenzeichen Σ im zweiten Theile der vorhergehenden Gleichung nur noch auf die verschiedenen Berührungen oder Berührungselemente anwendet, für welche δf nicht mehr dasselbe ist; so kann man diese Gleichung auf folgende Form bringen:

$$\Sigma \frac{p}{g}[(u_1-u_0)\delta x+(v_1-v_0)\delta y+(w_1-w_0)\delta z]=\Sigma F\delta f,$$

oder:

$$\Sigma \frac{p}{g}(u_1\delta u+v_1\delta y+w_1\delta z)=\Sigma \frac{p}{g}(u_0\delta x+v_0\delta y+w_0\delta z)+\Sigma F\delta f,$$

woraus folgt: daß zwischen den, den Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoße entsprechenden Quantitäten der Bewegung dieselben Relationen statt finden, als zwischen den äquivalenten Kräften, welche auf dieselben, als vollkommen fest betrachteten Systeme von Molekulen, die einander in gewissen Punkten berühren, wirken, wenn man jedoch bei dieser Aequivalenz die den Reibungen an den Berührungspunkten entsprechenden Quantitäten Bewegung in Rechnung bringt.

D'Alembert's Princip bei dem Stoße fester Körper.

Nach den Versuchen von Morin scheinen diese von den während des Stoßes stattfindenden Reibungen herrührenden Quantitäten der Bewegung wie die von gewöhnlichen Druckkräften herrührenden Reibungen berechnet werden zu müssen; d. h. man kann annehmen, daß sie zu den Quantitäten der Bewegung, welche den normal auf die Berührungsflächen ausgeübten Wirkungen entsprechen, in einem konstanten Verhältnisse stehen. Da das Verfahren zur Berechnung dieser letztern dasselbe ist, als für die zwischen den verschiedenen Bestandtheilen einer in Bewegung befindlichen Maschine statt findenden einfachen Druckkräfte, so werden wir später auf diese letzte Bestimmung zurückkommen.

Der vorhergehende Satz wird das d'Alembert'sche Princip für den Stoß der Körper genannt, wodurch die nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten bei einer beliebigen Bewegung zwischen den Kräften statt findenden Relationen auf die Quantitäten der Bewegung ausgedehnt werden. Aber man darf dabei nicht vergessen, daß dieses nur unter der Bedingung geschehen kann, daß die Molekule der Körper während des Stoßes, d. h. während des Zeitraumes zwischen den beiden Au-

genblicken, für welche man die beiden Systeme der Quantitäten der Bewegung bestimmt, ihre Lage im Raume nur sehr wenig geändert haben, d. h. daß die Veränderungen ihrer Koordinaten nur sehr kleine Größen sind. Das eben Gesagte wäre folglich nicht auf zwei Luftmassen anwendbar, welche sich während der Dauer des Stoßes sehr zusammendrücken.

§. 54. Wenn nach dem Stoße, in dem Augenblicke, für welchen die Geschwindigkeiten u_1, v_1, w_1 genommen werden, noch Erschütterungen der Molekule statt finden; so würde der vorhergehende Satz nichts lehren, weil sich von den eigenen Geschwindigkeiten der Molekule kein Schluß auf die Geschwindigkeiten des ganzen Systemes derselben und auf die Bewegungen der Körper machen ließe. Alsdann muß man zu den mittlern Bewegungen, durch deren Betrachtung wir bei dem Principe der lebendigen Kräfte ähnliche Schwierigkeiten beseitigt haben, seine Zuflucht nehmen, und auf folgende Weise verfahren.

Die zur Bestimmung der in der vorhergehenden Gleichung vorkommenden Größen δx, δy, δz gewählten virtuellen Bewegungen können für jeden Körper nur eine fortschreitende Bewegung des Schwerpunktes und nur eine Rotationsbewegung um diesen Punkt geben, und die Summen der daraus hervorgehenden virtuellen Momente erzeugen sowohl die Summen der Quantitäten der fortschreitenden Bewegung, als die Summen der Momente der Quantitäten der Bewegung um die Axen der virtuellen Rotation in Beziehung auf die Schwerpunkte der verschiedenen Körper. Da aber diese Größen für die wirklichen und für die mittlern Bewegungen dieselben sind, so kann man die letztern in die vorhergehende Gleichung substituiren, und alsdann hat man, wenn u_m, v_m, w_m die Geschwindigkeitskomponenten bei der mittlern Bewegung sind:

$$\Sigma \frac{p}{g}(u_m\delta x+v_m\delta y+w_m\delta z)=\Sigma \frac{p}{g}(u_0\delta x+v_0\delta y+w_0\delta z)+\Sigma F\delta f.$$

Aus dieser letzten Gleichung lassen sich immer so viele verschiedene Gleichungen ableiten, als zur Bestimmung der mittlern Bewegungen jedes Maschinenbestandtheiles erforderlich sind, und zwar wegen der verschiedenen Systeme, welche man für die virtuellen Geschwindigkeiten δx, δy, δz, etc. annehmen kann.

Wenn die Körper am Ende des Stoßes, d. h. in dem Augenblicke, für welchen die mittlern Geschwindigkeiten u_m, v_m, w_m genommen werden, noch in Berührung sind; so können diese mittlern Geschwindigkeiten, da sie mit den Verbindungen des Systemes während des Stoßes verträglich sind, für die virtuellen Geschwindigkeiten genommen werden, und die vorhergehende Gleichung verwandelt sich durch Division mit dt und Transposition in folgende:

$$\Sigma \frac{p}{g}(u_0 u_m + v_0 v_m + w_0 w_m) - \Sigma \frac{p}{g}(u_m^2 + v_m^2 + w_m^2) + \Sigma F \frac{\partial_m f}{dt} = 0.$$

Es ist aber:

$$u_0 u_m = \frac{1}{2}[u_0^2 + u_m^2 - (u_0 - u_m)^2]$$

und ähnliche Ausdrücke hat man für $v_0 v_m$, $w_0 w_m$, und wenn man dieselben substituirt; so erhält man:

$$\Sigma \frac{p}{2g}(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) - \Sigma \frac{p}{2g}(u_m^2 + v_m^2 + w_m^2) =$$

$$= \Sigma_m \frac{p}{2g}[(u_0 - u_m)^2 + (v_0 - v_m)^2 + (w_0 - w_m)^2] - \Sigma E \frac{\partial_m f}{dt}.$$

Es ist zu bemerken, daß das Glied $-\Sigma F \frac{\partial_m f}{dt}$ im Allgemeinen positiv ist, weil die der Kürze wegen mit F bezeichnete Quantität Bewegung $\int F \cos(F \delta f)\, dt$ gewöhnlich negativ ist; denn die unter dem Integralzeichen vorkommende Kraft F wirkt nach dem entgegengesetzten Sinne von dp des wirklichen Fortgleitens der Berührungsflächen aneinander, und da sich diese Richtung des Fortgleitens während des Stoßes wenig ändert, so ist sie sehr wenig von der des Elementes $\partial_m f$, welches dem Ende des Stoßes entspricht, verschieden. Folglich ist die in Rede stehende Quantität der Bewegung negativ und das Glied $-\Sigma F \frac{\partial_m f}{dt}$; also positiv.

Carnot's Lehrsatz.

Die vorhergehende Gleichung enthält den Carnot'schen Lehrsatz für den Stoß weicher oder unelastischer Körper, wo unter weichen oder unelastischen Körpern solche verstanden werden, welche nach dem Stoße mit einander in Berührung bleiben. Für solche Körper besteht also offenbar die Differenz zwischen der den Geschwindigkeiten vor dem Stoße und der den mittlern Geschwindigkeiten nach dem Stoße entsprechenden lebendigen Kraft aus zwei Theilen, nämlich: 1) aus der lebendigen Kraft, welche den durch den Stoß verlorenen oder gewonnenen, d. h. den Geschwindigkeiten entspricht, welche in Verbindung mit den nach dem Stoße stattfindenden Geschwindigkeiten die vor dem Stoße stattfin-

denden wiedergeben würden, und 2) aus der Summe der Produkte der den Reibungen während des Stoßes entsprechenden Quantitäten Bewegung mit den relativen Geschwindigkeiten der Reibung am Ende des Stoßes.

§. 55. Der vorhin gegebene Begriff weicher Körper, d. h. solcher, welche nach dem Stoße mit einander in Berührung bleiben, ist nur eine Abstraktion, welche in der Natur niemals realisirt vorkommt, und wenn man zuweilen diese Voraussetzung macht; so geschieht solches blos, um ein Maximum des durch den Stoß bewirkten Verlustes an Arbeit zu erhalten. In der Wirklichkeit bleiben die gegen einander gestoßenen Körper nicht miteinander in Berührung, sondern trennen sich vermöge einer Molekularrückwirkung, welche man Elasticität nennt und mehr oder weniger vollkommen sein kann. Die vollkommene Elasticität würde die Eigenschaft gewisser Körper sein, daß ihre Molekule nach dem Stoße genau dieselben Lagen wieder annehmen, wie vor dem Stoße, so daß die gegenseitigen Einwirkungen der Molekule gleiche und entgegengesetzte Größenzustände durchlaufen haben, wenn die gegenseitigen Entfernungen der Molekule wieder dieselben geworden sind, und von dem Augenblicke an, wo zwischen den in der Nähe der Berührung der beiden Körper liegenden Molekulen jede gegenseitige Wirkung aufhört, weder eine Schwingung, noch eine Verrückung statt findet. In diesem Falle würde durch den Stoß kein Verlust an lebendiger Kraft verursacht werden, selbst wenn man auch nur die mittlern Bewegungen nähme; denn da die gegenseitigen Einwirkungen der Molekule dieselben Werthe wieder annehmen, wenn ihre gegenseitigen Entfernungen wieder dieselben geworden sind; so sind die Integrale $\int R dr$ sämmtlich gleich Null, wenn sie vom Anfange der Molekularverrückungen bis zum Ende derselben genommen werden, und da die Molekule am Ende des Stoßes keine relativen Bewegungen gegen einander haben, so muß die lebendige Kraft für die mittlere Bewegung, welche die gesammte lebendige Kraft bildet, dieselbe bleiben. Diese Voraussetzung ist jedoch ebenfalls nur eine Abstraktion, welche für gewisse Körper und in besondern Fällen des Stoßes nur annähernd statt findet, wo sie, wie wir später bei den Anwendungen sehen werden, zur Bestimmung der Bewegung nach dem Stoße dient.

Princip über die Bewegung des Schwerpunktes eines Systemes von Körpern, oder einer Maschine.

§. 56. Das in §. 38 für einen freien festen Körper angeführte Princip läßt sich leicht auf ein System von festen Körpern ausdehnen, welche eine beliebige Maschine bilden, selbst wenn

Stöße darin ſtatt finden, wofern das Syſtem nur frei iſt und zu den drei Koordinatenaxen parallele virtuelle Bewegungen annehmen kann, für welche ſämmtliche virtuelle Geſchwindigkeiten gleich und parallel ſind. Um dieſes zu beweiſen, wollen wir wie in §. 38 verfahren und gleiche, zu den drei Axen parallele Geſchwindigkeiten zu den virtuellen Geſchwindigkeiten nehmen. Wenn wir die Bezeichnungen in §. 38 beibehalten, d. h. wenn U, V, W die Geſchwindigkeiten des Schwerpunktes des Syſtemes nach den drei Axen und u, v, w die analogen Geſchwindigkeiten eines beliebigen Molekules des Syſtemes von dem Gewichte p bezeichnen; ſo erhalten wir, wenn wir die gemeinſchaftlichen Faktoren beider Theile der Gleichungen (J), welche virtuelle Geſchwindigkeiten ſind, hinweglaſſen, die Gleichungen:

$$(A)\qquad \begin{cases} \Sigma p \frac{du}{dt} = \frac{dU}{dt}\,\Sigma p = \Sigma X, \\ \Sigma p \frac{dv}{dt} = \frac{dV}{dt}\,\Sigma p = \Sigma Y, \\ \Sigma p \frac{dw}{dt} = \frac{dW}{dt}\,\Sigma p = \Sigma Z, \end{cases}$$

in deren zweiten Theilen keine Glieder vorkommen, welche ſich auf die Molekularwirkungen deſſelben Körpers, oder auf die zweier einander berührender Körper des Syſtemes, oder der Maſchine beziehen; denn dieſe Wirkungen ſind paarweiſe einander gleich und entgegengeſetzt, und folglich ſind die entſprechenden Summen in den zweiten Theilen der Gleichungen ebenfalls Null. Wir haben alſo für ein freies Syſtem von Körpern, oder für eine beliebige Maſchine hier denſelben Satz, wie in §. 38 für einen freien feſten Körper, nämlich: »daß ſich der Schwerpunkt eines völlig freien Syſtemes feſter Körper, wie ein freier materieller Punkt bewegt, deſſen Maſſe der des ganzen Syſtemes gleich iſt, und auf welchen dieſelben äußern Kräfte wirken, wie auf das Syſtem, oder die Maſchine.

Wenn in dem Syſteme Stöße ſtatt finden, welche von äußern Körpern herrühren, ſo können die entſprechenden Kräfte zu denen gezählt werden, welche bei dieſem Principe über die Bewegung des Schwerpunktes in Betracht kommen und die Bewegung des fingirten materiellen Punktes, welcher ſich wie der Schwerpunkt bewegt, wird alsdann gerade ſo verändert, wie wenn die äußern Stöße unmittelbar auf dieſen Punkt ſelbſt ausgeübt würden. Wenn man die beiden Theile der obigen Gleichungen in Beziehung auf die Zeit integrirt, ſo wird das vorhin für die Kräfte ausgeſprochene Princip auf die Quantitäten der Bewegung ausgedehnt, und man kann alsdann ſagen: daß, wenn in dem Syſteme von äußern Körpern herrührende Stöße

statt finden, die Geschwindigkeit des Schwerpunktes des Systemes gerade so plötzlich geändert wird, wie wenn auf einen materiellen Punkt, dessen Masse der des ganzen Systemes gleich ist, die von diesen Stößen herrührenden Quantitäten der Bewegung direkt übertragen würden.

Princip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes.

In dem besondern Falle, wo keine äußere Kraft auf das bewegliche System wirkt und nur die gegenseitigen Einwirkungen zwischen den Molekulen statt finden, können diese Wirkungen nicht zu den an dem Schwerpunkte angebrachten Kräften gezählt werden, weil sie sich, wenn sie an diesem Punkte angebracht wären, doch paarweise gegenseitig aufheben würden, und folglich hat dieser Schwerpunkt eine gleichförmige und geradlinige Bewegung, wie ein materieller Punkt, auf welchen keine Kraft wirkt, so daß also seine Quantität der Bewegung ungeändert bleibt. Dieser Satz wird das Princip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes genannt. Wenn zwischen dem zu dem Systeme gehörigen Körpern Stöße statt finden, so wird dadurch die Bewegung des Schwerpunktes nicht geändert, und erfolgt gerade so, wie wenn diese Stöße nicht statt finden, weil die den Wirkungen dieser Stöße entsprechenden Glieder in den obigen Gleichungen verschwinden.

Princip der Erhaltung der Momente der Quantitäten der Bewegung.

§. 57. Wenn auf das bewegliche System keine äußere Kraft wirkt und auf die Molekule der das System bildenden Körper in ihrem gewöhnlichen Zustande, oder während des Stoßes, wenn ein solcher zwischen den Körpern des Systemes statt findet, keine andern Kräfte, als ihre gegenseitigen Einwirkungen ausgeübt werden; so bleiben die Momente der Quantitäten der Bewegung sämmtlicher Molekule dieselben, wenn man diese Momente in Beziehung auf eine Axe nimmt, um welche sich das System frei drehen kann.

Man beweist diesen Satz, wenn man für ein System von Körpern ebenso verfährt, wie in §. 37 für einen einzelnen festen Körper verfahren ist, d. h. wenn man für die virtuellen Geschwindigkeiten diejenigen nimmt, welche sich aus der Annahme ergeben, daß man dem ganzen Systeme, als festen Körper betrachtet, eine

Rotationsbewegung um eine Axe ertheilt. Denn wenn man diese Axe wie in §. 37 zu der Axe der z nimmt, so erhält man:

$$\Sigma \frac{p}{g}\left(x\frac{dv}{dt} - y\frac{du}{dt}\right) = \Sigma(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X}).$$

Aber wenn die Kräfte X und Y von den gegenseitigen Einwirkungen der Molekule des Systemes, während ihres gewöhnlichen Nebeneinanderliegens, oder während des Stoßes herrühren, in welchem letztern Falle diese gegenseitigen Einwirkungen weit beträchtlicher werden; so sind die zweiten Theile der Gleichungen Null, weil die Momente zweier gleicher und entgegengesetzter Wirkungen eine Summe gleich Null geben. Man hat folglich:

$$\Sigma \frac{p}{g}\left(x\frac{dv}{dt} - y\frac{du}{dt}\right) = 0,$$

und wenn man in Beziehung auf die Zeit integrirt:

$$\Sigma \frac{p}{g}(xv - yu) = \mathrm{C},$$

wo C hier eine sich auf die Zeit beziehende Konstante ist. Der erste Theil dieser Gleichung ist die Summe der Momente der Quantität der Bewegungen, wenn man unter dem Momente einer Quantität der Bewegung für jedes Molekul das Moment einer fingirten Kraft versteht, welche auf dieses Molekul nach der Richtung seiner Geschwindigkeit wirkt und das Produkt aus seiner Masse $\frac{p}{g}$, und aus dieser Geschwindigkeit zum Maße hat.

Man hat also folgenden Satz: In einem beliebigen Systeme von Körpern, oder in irgend einer Maschine, worauf keine äußere Kraft wirkt, sondern nur die von der gegenseitigen Berührung oder dem Stoße der das System oder die Maschine bildenden Körper herrührenden Kräfte sind die Summen der Momente der Quantitäten der Bewegung aller Molekule des Systemes in Beziehung auf eine gerade Linie, welche für die virtuelle Bewegung als Rotationsaxe dienen kann, während der Dauer der Bewegung konstant.

Vermittelst dieses Principes kann man die Bewegung für zwei sich um gewisse feste Axen drehende Systeme nach dem Zusammenstoßen bestimmen.

Allgemeines Princip der Uebertragung oder Fortpflanzung der Arbeit.

§. 58. Wir können nun das Princip der Uebertragung oder Fortpflanzung der Arbeit auf eine aus einem Syſteme feſter Körper beſtehende Maſchine ausdehnen, indem wir zugleich auf die Reibungen, die Erſchütterungen der Molekule und die Stöße Rückſicht nehmen. Zu dem Zwecke brauchen wir nur für jeden Beſtandtheil der Maſchine die mittlern Bewegungen zu nehmen, zu der Widerſtandsarbeit die hinzuzufügen, welche von den Reibungen der einzeln Beſtandtheile unter einander herrühren, und die Verluſte an lebendiger Kraft in Rechnung zu bringen, welche von den Stößen herrühren, wenn dergleichen ſtatt finden und die Körper nicht nahezu vollkommen elaſtiſch ſind. Wenn T_m die Quantität Bewegungsarbeit bezeichnet, welche den äußern bewegenden Kräften während der Zeit entſpricht, für welche man das Princip der Uebertragung der Arbeit anwenden will, T_r die Quantität Widerſtandsarbeit während derſelben Zeit für die äußern Kräfte mit Einſchluß der von den äußern Körpern herrührenden Reibungen, T_f die durch die Reibungen zwiſchen den Maſchinenbeſtandtheilen konſumirte Quantität Arbeit und endlich T_c die von den Stößen, welche während der betrachteten Dauer der Bewegung haben ſtatt finden können, konſumirte Quantität Arbeit; ſo hat man, wenn w die Geſchwindigkeit eines beliebigen Molekules des Syſtemes und p das Gewicht deſſelben bezeichnet, nach dem in Vorhergehendem Geſagten offenbar:

$$T_m - T_r - T_f - T_c = \Sigma \frac{pw^2}{2g} - \Sigma \frac{pw_0^2}{2g},$$

wo w_0 die Geſchwindigkeit im Anfange der Bewegung bezeichnet.

Wenn die Bewegung für eine Zeit betrachtet wird, welche gegen die Zeit etwas beträchtlich iſt, die erfordert wird, um die Maſchine in Bewegung zu ſetzen, und derſelben ihre größte lebendige Kraft zu ertheilen; ſo ſind die Glieder $\Sigma \frac{pw^2}{2g}, \Sigma \frac{pw_0^2}{2g}$ gegen die übrigen Glieder ſehr klein, oder wenigſtens iſt ihre Differenz ſehr klein, und man kann alsdann mit einer ſehr großen Annäherung ſetzen:

$$T_m = T + T_f + T_c.$$

Wenn T'_m die den äußern Körpern von der Maſchine mitgetheilte Bewegungsarbeit und T'_f die durch die Reibung zwiſchen dieſen äußern Körpern und denen der Maſchine konſumirte Arbeit bezeichnet, welche auf die in §. 52 angegebene Weiſe beſtimmt werden muß; ſo hat man:

$$T_r - T'_m = T'_f, \text{ oder } T_r = T'_m + T'_f,$$

und wenn man in den vorhergehenden Werth von T_m ſubſtituirt:

$$T_m = T'_m + T'_f + T_f + T_c.$$

Dieſe Gleichung enthält den allgemeinſten Ausdruck des Principes der Uebertragung der Arbeit, woraus folgt, daß die von der Maſchine auf äußere, ihrer Bewegung widerſtehende Körper übertragene Bewegungsarbeit T'_m kleiner iſt, als die dieſer Maſchine mitgetheilte Bewegungsarbeit T_m, und daß der Unterſchied dieſer beiden Quantitäten Arbeit aus den Verluſten an Arbeit beſteht, welche von den Reibungen der Maſchinentheile unter ſich und an den äußern in Bewegung geſetzten Körpern, ſo wie von den Stößen herrühren.

Wenn man dieſe Bewegungen nicht für eine ſehr lange Zeit betrachtet und die Quantitäten Arbeit nur für eine Zeit nimmt, die mit der vergleichbar iſt, welche erfordert wird, damit die Maſchine von dem Beginnen ihrer Bewegung an ihre größte Geſchwindigkeit bekommt; ſo kann man die Zu- oder Abnahme der Summe der lebendigen Kräfte nicht mehr vernachläſſigen, und man muß ſetzen:

$$T_m = T'_m + T_f + T'_f + T_c + \Sigma \frac{pw^2}{2g} + \Sigma \frac{pw_0^2}{2g}.$$

Die Zunahme der Summe der lebendigen Kräfte, wenn eine ſolche exiſtirt, findet nur auf Koſten der Bewegungsarbeit ſtatt, welche größer werden muß, um dieſen Zuwachs hervorzubringen; allein dieſe momentane Zunahme iſt nicht verloren, weil, wenn ſpäter eine Abnahme der lebendigen Kraft ſtatt findet, die Widerſtandsarbeit T'_m zunehmen kann, ohne daß T_m zunimmt, und die Zunahme der lebendigen Kraft erſcheint hier, wie bereits bemerkt worden, gewiſſermaßen wie eine reſervirte Quantität Arbeit, welche reſtituirt wird, ſobald ſich die Bewegung verzögert.

Bemerkungen über die Ausdehnung des Principes der Uebertragung der Arbeit auf biegſame und auf flüſſige Körper.

Außer den feſten oder ſtarren Körpern wendet man bei den Maſchinen auch *Seile* und *Riemen* an, und um in dieſem Falle das Princip der Uebertragung der Arbeit anzuwenden, braucht man nur die Verluſte in Rechnung zu bringen, welche von den in dieſen *biegſamen* und *dehnbaren* Körpern ſtatt findenden Molekularverrückungen herrühren. Die Beobachtung lehrt, daß dieſe Verluſte ſehr gering ſind; denn wenn die beiden Enden eines Seiles, oder jedes andern ſtellvertretenden biegſamen Syſtemes in der Richtung ihrer Länge dieſelbe Geſchwindigkeit haben,

so wird der Verlust an Arbeit durch die Differenz der Kräfte angegeben, welche sie in dieser Richtung erhalten, und da diese Differenz wenig beträchtlich ist; so gilt dasselbe auch von den entsprechenden Quantitäten Arbeit. Wir werden später auf die Bestimmungsart dieser Verluste zurückkommen; für den Augenblick genügt es, einzusehen, daß sie nicht beträchtlich sind.

Was die Flüssigkeiten anlangt, so müssen dieselben als Inbegriffe sehr kleiner fester Kugeln betrachtet werden, welche ohne merkliche Reibung an einander hingleiten können, und es hindert folglich nichts, das Princip der Uebertragung der Arbeit auf sie anzuwenden, wenn man auf die kleinen Verluste Rücksicht nimmt, welche von den Reibungen der Flüssigkeitstheilchen unter sich und von den etwa stattfindenden Stößen herrühren. Die Erfahrung lehrt, daß, wenn keine plötzlichen Stöße, sondern blos Reibungen der Flüssigkeitstheilchen unter sich stattfinden, die entsprechenden Verluste an Arbeit sehr gering sind.

Drittes Kapitel.

Allgemeine Betrachtungen über die Maschinen, welche zur Uebertragung der Bewegung eines Bewegers dienen.

§. 59. Aus dem Vorhergehenden folgt, daß die Arbeit eine Größe ist, welche durch die Anwendung von Maschinen nicht vermehrt werden kann, und letztere sind blos dazu bestimmt, die bewegende Kraft, oder den von ihrem Angriffspunkte in einer gegebenen Zeit beschriebenen Weg zu vergrößern, oder zu verkleinern, diese Kraft oder diesen Weg in mehrere Theile zu zerlegen und ihre Lagen und Richtung zu verändern, oder mit einem Worte: diese Kraft und diesen Weg einem bestimmten Zwecke gemäß zu verändern, ohne daß jedoch die Arbeit jemals vergrößert werden kann. Der Theil dieser Arbeit, welchen die Maschinen wieder hervorbringen können, ist um so weniger von der auf sie übertragenen Arbeit verschieden, je geringer die in diesen Maschinen statt findenden Reibungen sind, und wenn man Maschinen konstruiren könnte, worin keine Reibungen statt fänden; so würde von der auf sie übertragenen Arbeit nichts verloren gehen.

Man kann die Uebertragung oder Fortpflanzung der Arbeit durch Maschinen mit der Ausströmung einer Flüssigkeit vergleichen, welche sich in den Körpern verbreitet, indem sie durch die Berührungspunkte aus dem einen in den andern übergeht, sich in mehrere Ströme abtheilt, wenn ein einzelner Körper zugleich mehrere andere fortschiebt, und wovon umgekehrt mehrere Ströme in einen einzigen vereinigt werden, wenn mehrere Körper zugleich denselben Körper fortschieben. Diese Flüssigkeit könnte sich auch in gewissen Körpern anhäufen und darin so lange bleiben, bis sie durch neue Berührungspunkte oder durch Berührungspunkte von einer beträchtlichern Ausströmung austreten kann. Diese in den Körpern angehäufte oder reservirte Arbeit, welche wir eben mit einer Flüssigkeit verglichen haben, ist nichts anders, als die lebendige Kraft, und eine Maschine ist bei unserer Vergleichung

in dem gewöhnlichen Sinne des Wortes nichts anders, als ein in Bewegung befindliches System von Körpern, welches eine Art von Kanal bildet, durch welchen die Arbeit möglichst unvermindert nach gewissen Punkten übergehen kann. Diese Arbeit verliert sich allmählig in Folge der Reibungen und der Formveränderungen der Körper, oder sie geht in die Erde über, worin sie wegen der beträchtlichen Ausdehnung bald unmerklich wird.

Diese Arbeit bildet das Fundelement bei der Schätzung des Effektes der Beweger und auf ihre Bestimmung beziehen sich daher hauptsächlich alle Untersuchungen in ökonomischer Rücksicht bei der Anwendung von Bewegungsmaschinen, wie wir sogleich zeigen werden.

Alle zu unseren Bedürfnissen erforderlichen Verrichtungen bestehen zuletzt in der Bewegung, oder Formveränderung der Körper, wobei immer gewisse Widerstände überwunden und gewisse Kräfte ausgeübt werden müssen, und mithin ist eine solche durch eine Kraft bewirkte Bewegung, oder Formveränderung eine Nutzleistung oder Arbeit, welche, sie mag durch Thiere, bewegte Luft, Dampfdruck, oder Wassergefälle hervorgebracht werden, für jeden Ort und jede Zeit nur innerhalb gewisser Grenzen vorhanden ist, und nicht nach Belieben hervorgebracht werden kann.

Auch die Maschinen dienen nur zur Anwendung oder Ansammlung dieser Leistung oder Arbeit, ohne sie vergrößern zu können, und deshalb hat die Fähigkeit, eine solche Arbeit hervorbringen zu können sowohl, wie alle andern nützlichen Gegenstände, welche nicht im äußersten Uebermaße vorhanden sind, und welche man sich nicht ohne Kostenaufwand verschaffen kann, einen gewissen Werth, welcher in kommerzieller und ökonomischer Rücksicht in Betracht kommen kann.

Wenn wir keine Maschinen zu unserer Disposition hätten, so wären zwei verschiedene Verrückungen oder Bewegungen von Körpern zwei Dinge von verschiedener Natur, welche im Allgemeinen ihrem Werthe nach nicht mathematisch bestimmt werden könnten, und es verhielte sich hiermit, wie mit vielen andern nutzbaren Sachen, deren Werthe nicht mathematisch bestimmt werden. Aber die Maschinen geben, wie wir sogleich sehen werden, das Mittel an die Hand, solche Bewegungen auf eine ähnliche Weise ihrem Werthe nach zu bestimmen, wie man größere oder kleinere Quantitäten desselben Stoffes oder derselben Materie vergleicht und ihrem Werthe nach bestimmt.

Wenn eine Maschine, worauf ein Beweger wirkt, zur Hervorbringung eines gewissen Nutzeffektes bestimmt ist, so wirken auf die Punkte derselben, welche auf die zu bewegenden oder zu verändernden Körper wirken, Widerstandskräfte; aber diese Widerstandskräfte sind im Allgemeinen nicht die einzigen, welche die Widerstandsarbeit hervorbringen, sondern es entstehen durch die Reibungen und die verschiedenen andern Widerstände, welche man nicht beseitigen kann, auch noch andere Widerstandsarbeiten, welche

ſich zu der von dem Nutzeffekte herrührenden hinzufügen. Da man ſich jedoch vorſtellen kann, daß dieſe andern Hinderniſſe nicht vorhanden ſind und blos die von dem Nutzeffekte herrührenden Widerſtandskräfte wirken, oder alle übrigen Widerſtandskräfte ſo weit vermindert ſind, daß ſie gegen letztere ziemlich gering erſcheinen; ſo kann man vorläufig annehmen, als wenn nur die von dem Nutzeffekte herrührenden Widerſtandskräfte vorhanden wären. Man ſieht übrigens leicht ein, wie man in der Praxis die aus dieſer Vorausſetzung abgeleiteten Schlüſſe abändern muß, und wir wollen daher einſtweilen annehmen, daß die ganze Widerſtandsarbeit in der Hervorbringung des Nutzeffektes beſteht.

Wenn man das Mittel hat, eine gewiſſe Bewegung hervorzubringen, indem man eine gewiſſe Kraft ausübt; ſo kann man vermittelſt einer Maſchine, welche die Bewegung und die Kräfte gehörig abändern kann, dieſes Mittel oder dieſe Kraft zur Verrichtung einer gewiſſen Arbeit oder Fabrikation, z. B. zum Mahlen des Getraides, u. ſ. w. anwenden. Da aber das Mahlen deſſelben Quatums Getraide im Allgemeinen unter denſelben Umſtänden ſtatt findet, ſo folgt, daß die Punkte, auf welche die Maſchine gewirkt hat, denſelben Weg beſchrieben und dieſelbe Einwirkung erfahren haben, ſo daß alſo zu dem Mahlen deſſelben Quantums Getraide auch dieſelbe Quantität Arbeit erfordert wird, welche wir Widerſtandsarbeit genannt haben, und folglich iſt dieſe auf die Maſchine ausgeübte Widerſtandsarbeit der Quantität des gemahlenen Getraides proportional. Da wir aber nach der Vorausſetzung von den andern Widerſtänden als der des Nutzeffektes abſtrahiren, ſo bildet dieſe Quantität Widerſtandsarbeit auch die auf die Maſchine übertragene Quantität Arbeit des Bewegers, und folglich iſt dieſe letztere ebenfalls der gemahlenen Quantität Getraide proportional.

Um alſo zwei Beweger mit einander zu vergleichen, braucht man nur anzunehmen, daß man Maſchinen habe, vermittelſt welcher man ſie zur Verrichtung derſelben Arbeit, z. B. zum Mahlen des Getraides anwenden kann; denn die während derſelben Zeit gemahlenen Quantitäten Getraide ſind nahezu den während derſelben Zeit von den Bewegern dieſen Maſchinen mitgetheilten Quantitäten Arbeit proportional. Nun verhalten ſich aber die Werthe zweier Beweger offenbar wie die während derſelben Zeit gemahlenen Quantitäten Getraide, und da ſich die letztern wie die auf die Maſchinen übertragenen Quantitäten Arbeit verhalten; ſo folgt, daß ſich die Werthe der Motoren oder Beweger offenbar wie die Quantitäten Arbeit verhalten, welche ſie auf dieſe Maſchinen übertragen können.

Da man nun gegenwärtig leicht Maſchinen konſtruiren kann, auf welche man verſchiedene Beweger wirken laſſen kann, damit ſie vermittelſt dieſer Maſchinen dieſelbe Art Arbeit verrichten; ſo hat man dieſe Beweger nach den Quantäten derſelben Art Arbeit, welche ſie in derſelben Zeit verrichten können unter einander ver-

glichen, und diese Art der Vergleichung hat sich durch die Vervollkommnung und Vervielfältigung der Maschinen immer weiter verbreitet, ungefähr eben so, wie durch die Erfindung und Vervollkommnung der zum Zertheilen der Materialien bestimmten Werkzeuge im Handel die Werthe dieser Materialien durch eine geometrische Größe, das Volumen bestimmt werden.

Bei dieser Art der Vergleichung des Werthes zweier Beweger haben wir zweierlei vorausgesetzt, nämlich 1) daß in allen Maschinen die von dem Nutzeffekte herrührende Widerstandsarbeit der Bewegungsarbeit gleich ist, und 2) daß die Herstellung und Unterhaltung der Maschinen keine Kosten verursachen. Es ist aber leicht einzusehen, daß diese Voraussetzungen nicht durchaus nothwendig sind, und daß unsere Schlüsse noch richtig bleiben, wenn man blos annimmt: 1) daß die von dem Nutzeffekte herrührende Widerstandsarbeit zwar nicht die ganze Widerstandsarbeit, aber dieser proportional ist, d. h. daß die von den Reibungen und jeder andern Ursache herrührenden Verluste an Arbeit der Bewegungsarbeit proportional sind, und 2) daß die Herstellungs- und Unterhaltungskosten der Maschine ebenfalls dieser Bewegungsarbeit proportional sind.

Diese Proportionalitäten, obgleich sie sich der Wahrheit weit mehr nähern, als die Annahme einer völligen Gleichheit zwischen der Bewegungsarbeit und der dem Nutzeffekte entsprechenden Widerstandsarbeit, finden dennoch im Allgemeinen in der Praxis nicht statt. Auch bezahlt man im Handel die Beweger nicht allein nach der Quantität Arbeit, welche sie hervorbringen können, sondern man nimmt dabei auch mehr oder weniger auf den Verlust an Arbeit Rücksicht, welcher in den anzuwendenden Maschinen von den Reibungen und von den übrigen fremdartigen Widerständen herrührt, und endlich bringt man auch die zur Herstellung und Unterhaltung dieser Maschinen erforderlichen Kosten in Anschlag. Aber immer muß man zuerst die Bewegungsarbeit berechnen, welche hervorgebracht werden kann, und die Grundbestimmung bildet, woran man alsdann die durch besondere Umstände veranlaßten Modificationen anbringen muß.

Es verhält sich bei der Bestimmung des Werthes der Beweger mit der Arbeit, wie mit mehreren Elementen geometrischer Messungen, welche ebenfalls auf Abstraktionen beruhen, und in der Praxis nur noch Annäherungen sind. Wenn man z. B. den Werth gewisser Körper durch die Messung ihrer Volumina bestimmt, wie dieses bei den Steinen und Hölzern geschieht, so nimmt man an, daß ein Körper von zwei Volumeneinheiten auch so viel Material giebt, als zwei Körper von derselben Art, wovon jeder nur eine Volumeneinheit hat. Um aber diese Vorstellung zu realisiren, muß man den ersten Körper durch Sägen oder Schneiden zertheilen, wodurch ein Theil desselben verloren geht, und da dieser Theil nicht mit dem Volumen in Verhältniß steht; so findet das geometrische Verhältniß zwischen den Volumen und dem wirk-

lichen Geldwerthe des Körpers nicht mehr in aller Strenge ſtatt. Es findet alſo in dieſer Beziehung zwiſchen der Werthsbeſtimmung gewiſſer Körper nach ihrem Volumen und der der Beweger nach ihrer Arbeit eine vollkommene Analogie ſtatt; denn die den in den Maſchinen ſtattfindenden Reibungen entſprechenden Verluſte an Arbeit entſprechen genau den Verluſten an Materie oder Subſtanz bei der Zertheilung der Körper, und die Herſtellungs- und Unterhaltungskoſten der Maſchinen, welche erforderlich ſind, um verſchiedene Beweger zur Verfertigung verſchiedener Quantitäten derſelben Art von Arbeit anwenden und auf dieſe Weiſe dieſe Beweger nach den von ihnen hervorgebrachten Quantitäten Arbeit vergleichen zu können, entſprechen genau den Koſten, welche die Werkzeuge oder Maſchinen verurſachen, wodurch Körper von verſchiedenem Volumen auf ſolche von gleichem Volumen zurückgeführt werden. Die für ſämmtliche Kräfte eines Bewegers berechnete Arbeit ſpielt alſo bei der Beſtimmung des Werthes dieſes Bewegers dieſelbe Rolle, wie das Volumen bei der Beſtimmung des Werthes gewiſſer Subſtanzen. Hieraus kann man ſchon ſchließen, wie nothwendig die Beſtimmung dieſer Größe in der Theorie der Maſchinen und der Motoren iſt, wie man im Verlaufe dieſes Werkes noch näher ſehen wird.

Es wird nicht überflüſſig ſein, hier einer Schwierigkeit zu begegnen, welche man zuweilen in Beziehung auf das Maß des Werthes einer Bewegung durch die Arbeit, wie wir ſie definirt haben, erhoben hat, indem man behauptet, daß die Zeit auch ein Element des Werthes der Bewegung oder des Transportes einer Maſſe ſei, und namentlich die größere oder geringere Schnelligkeit mit in Betracht gezogen werden müſſe.

In vielen Fällen iſt es ohne Zweifel mehr oder weniger von Nutzen, daß ein gewiſſer mechaniſcher Effekt oder eine gewiſſe Bewegung mehr oder weniger ſchnell hervorgebracht wird; allein dieſe Art von Nutzen gehört zu denjenigen, welche kein beſtimmtes Maß geſtatten. Zwei ähnliche Bewegungen, wie z. B. der Transport zweier Laſten in verſchiedenen Zeiten ſind zwei Nutzleiſtungen von ganz verſchiedener Natur, welche in Beziehung auf die Zeit keine geometriſche Vergleichung geſtatten. Wenn es übrigens darauf ankommt, vermittelſt einer Maſchine eine gewiſſe Quantität ähnlicher Bewegungen hervorzubringen, ſo iſt dieſes in vielen Fällen nicht koſtſpieliger, wenn es *gleichzeitig*, als wenn es *ſucceſſive* geſchieht, und es kann daher die Zeit hierbei nicht in Betracht kommen. Wenn z. B. zehn Menſchen zum Heben von Laſten beſtimmt ſind, und man wünſcht dieſe Arbeit ſchneller verrichtet zu haben, ſo kann man ſehr wohl gleichzeitig zwanzig Menſchen anwenden, ohne daß es mehr Koſten verurſacht, dieſelbe Arbeit in der Hälfte der Zeit verrichtet zu bekommen, und folglich kann auch hier die Zeit im Allgemeinen bei der Beſtimmung des Werthes der Arbeit nicht in Betracht kommen. Wenn ferner eine Dampfmaſchine ein Walzwerk treibt, und man will in einem Tage

weit mehr Eisen produciren, wie gewöhnlich, so kann man gleichzeitig zwei solcher Maschinen anwenden, und alsdann, ohne daß es für ein bestimmtes Gewicht Eisen mehr Kohlen kostet, mit zwei Maschinen in einem Tage eben so viel Eisen produciren, als mit einer Maschine in zwei Tagen. Da man also die zu einer gewissen Fabrikation erforderliche Zeit ohne sehr beträchtliche Kostenvermehrung vermindern kann, so kann die Zeit im Allgemeinen bei der Bestimmung des Werthes der Arbeit nicht in Betracht kommen, und wenn dieses zuweilen geschehen kann, so liegen der Arbeit ganz fremdartige Ursachen zu Grunde.

Die Unterscheidung zwischen der Zeit und der Arbeit bei der Bestimmung des Werthes der Motoren ist der ganz analog, welche man bei dem Ankaufe gewisser Gegenstände zwischen der gekauften Quantität und der zur Lieferung derselben erforderlichen Zeit macht, und obgleich es oft sehr vortheilhaft sein kann, daß die allmählige Lieferung einer Waare in acht Tagen statt in einem Monate beendigt wird; so bleibt doch die Quantität dieser Waare immer das Hauptelement bei einem Handel.

Der Name Arbeit, welchen wir gewählt haben, scheint uns sehr dazu geeignet zu sein, einen genauen Begriff von der zu bezeichnenden Größe zu geben. Denn wenn man z. B. von der Arbeit spricht, welche ein Pferd täglich hervorbringt; so sieht man leicht ein, daß dieses das Produkt aus der Kraft ist, mit welcher das Pferd nach der Richtung des Weges ziehen kann, und aus der Länge dieses Weges, oder allgemeiner das Integral des Produktes aus dieser Kraft und dem Elemente dieses Weges. Desgleichen, wenn man sagt, daß der durch ein Kilogramm Kohlen gelieferte Wasserdampf eine gewisse Quantität Arbeit hervorbringt; so begreift man leicht, daß dieselbe nichts anders ist, als das Produkt aus dem auf den Kolben ausgeübten Drucke und aus dem beschriebenen Wege, oder das Integral des Produktes aus der Spannung des Dampfes und dem Differenziale des Weges.

Die Bedeutung der Ausdrücke Bewegungsarbeit, Widerstandsarbeit, Nutzarbeit und verlorene Arbeit, welche alle bei der Anwendung des Wortes Arbeit in der Theorie der Maschinen vorkommenden Unterscheidungen ausdrücken, sind für sich klar und bedürfen weiter keiner Rechtfertigung.

Da das Arbeitselement das Produkt aus einem unendlich kleinen Wege und einer nach der Richtung dieses Weges wirkenden Kraft ist, so scheint die der Krafteinheit und der Längeneinheit, d. h. dem Kilogramme und dem Meter entsprechende Arbeit als natürliche Arbeitseinheit genommen werden zu müssen; allein da die gewöhnlichen Bewezer, wie das Wasser, die Thiere und der Dampf schon in kurzer Zeit Quantitäten Arbeit hervorbringen, welche bei dieser Einheit durch zu große und unbequeme Zahlen ausgedrückt würden; so pflegt man allgemein zur Arbeitseinheit diejenige zu nehmen, welche einer Kraft von 1000 Kilogrammen und einem Wege von 1 Meter in der Richtung dieser

Kraft entspricht. Diese Arbeitseinheit scheint die zweckmäßigste zu sein, weil sie weder zu klein, noch zu groß ist, so daß man weder zu oft Brüche, noch zu große Zahlen anzuwenden braucht. Die Arbeit, welche ein Mensch täglich hervorbringen kann, wird bei dieser Einheit durch Zehner, die eines Pferdes in derselben Zeit durch Tausender und die der Dampfmaschinen oder Wasserfälle ebenfalls für einen Tag durch Zehntausender ausgedrückt, welche Zahlen für den gewöhnlichen Gebrauch hinreichend bequem sind.

Es wäre zu wünschen, daß man für diese Arbeitseinheit allgemein einen passenden Namen einführte, und einige Mechaniker haben sie Dynamie genannt; allein wenn man einmal eine aus dem Griechischen abgeleitete Benennung anwenden will, so muß man auch die griechischen Wurzeln der Ausdrücke Kraft und Weg beibehalten, und wir werden uns daher im Verlaufe dieses Werkes zur Bezeichnung der Arbeitseinheit des Ausdruckes »Dynamode« bedienen. Es ist aber wohl zu bemerken, daß, wenn das Produkt aus einer Kraft und aus einem Wege eine Größe der Art sein soll, welche wir Arbeit genannt haben, die Kraft nach der Richtung dieses Weges geschätzt werden muß. In einigen Werken, worin Tabellen über die tägliche Quantität Arbeit der Menschen und Thiere unter verschiedenen Umständen mitgetheilt sind, hat man die Wege, welche ein Mensch oder ein Pferd mit verschiedenen Lasten auf verschiedenen Arten von Wegen zurücklegen kann, angegeben und das Produkt aus dem Wege und aus der Last in dieselbe Kolumne mit den Quantitäten Arbeit gesetzt und diesen Produkten denselben Namen gegeben; allein man muß, obgleich die Angabe solcher Resultate über den horizontalen Transport von Lasten sehr nützlich sein kann, das Produkt aus dem Wege und der Last nicht mit demselben Namen bezeichnen, wie das Produkt, welches wir Arbeit genannt haben.

Wenn man das Produkt aus einem Wege und aus einer auf seiner Richtung senkrechten Kraft ebenfalls mit dem Namen Arbeit bezeichnen wollte, so müßte zwischen diesen beiden Größen eine Art von Aequivalenz statt finden, so daß man gewissermaßen die eine in die andere verwandeln könnte, was offenbar nicht möglich ist. Dieselbe Arbeit kann mit einer auf der Richtung des Weges senkrechten Kraft begleitet sein, aber es kann dadurch keine Arbeit hervorgebracht werden, welche auf irgend eine Weise von dem Produkte aus dem beschriebenen Wege und einer Normalkraft abhängt, und umgekehrt kann eine gewisse Arbeit nicht einem Wege und einer Normalkraft entsprechen, deren Produkt in einem bestimmten Verhältnisse zu dieser Arbeit steht. Es findet zwischen diesen beiden Arten von Produkten keine nothwendige Beziehung statt, so daß man im Allgemeinen nicht von dem einen auf das andere schließen kann, und man muß sie daher auch nicht mit demselben Namen bezeichnen.

Man würde ſogar einen Fehler begehen, wenn man dem Produkte aus einem Wege und aus einer auf ſeiner Richtung ſenkrechten Kraft einen beſtimmten Namen geben wollte, weil die beiden Faktoren dieſes Produktes mittelſt Maſchinen nicht in einander verwandelt werden können, wie dieſes bei der Arbeit der Fall iſt, und zwei gleiche Produkte in dieſem Sinne im Allgemeinen nicht auf Größen anwendbar ſind, welche eine gewiſſe Art von Aequivalenz haben. Wenn dieſes unter beſondern Umſtänden ſtatt zu finden ſcheint, ſo liegt der Grund darin, daß die Kraft in der Richtung des Weges zuweilen eine Art von Reibung wird, welche nahezu dem Normaldrucke proportional iſt, und daß alsdann die Arbeit ebenfalls dem Produkte aus dem beſchriebenen Wege und dieſem Normaldrucke proportional iſt. Wie ſich die beiden Elemente der Arbeit in einander verwandeln können, ſo kann dieſes auch in dem gegenwärtigen Falle mit den beiden Elementen des andern Produktes geſchehen; aber nur wegen der erwähnten Proportionalität, und ſobald dieſe nicht mehr ſtatt findet, kann man auch zwei Produkte aus zwei beſchriebenen Wegen und zwei darauf ſenkrechten Kräften nicht mehr mit einander vergleichen.

Wenn z. B. Laſten durch Pferde auf derſelben Art von Straßen fortgezogen werden, ſo iſt das Gewicht der Laſt nahezu der Zugkraft, oder der Anzahl der anzuwendenden Pferde, proportional, und da ſich faſt alle Laſten zertheilen und auf mehrere Fuhrwerke transportiren laſſen; ſo folgt, daß nahezu ebenſo viele tägliche Pferdekräfte zum Transport einer gewiſſen Quantität Waaren auf eine gewiſſe Entfernung, als zum Transporte einer halb ſo großen Quantität Waaren auf die doppelte Entfernung erfordert werden, ſo daß man näherungsweiſe die Transportkoſten auf einer beſtimmten Art von Wegen als den Produkten aus den transportirten Gewichten und aus den beſchriebenen Wegen proportional betrachten kann. Aber dieſe Proportionalität iſt der Bedingung untergeordnet, daß man die Anzahl der Pferde, oder die Zugkraft, in der Richtung des beſchriebenen Weges als dem Gewichte der zu transportirenden Laſt proportional betrachten kann, was vorausſetzt, daß man nur ein und dieſelbe Straße betrachtet; denn wenn ſich dieſe ändert, ſo werden auch andere Grundlagen der Rechnung erfordert, eben weil ſich die Größe ändert, welche wir Arbeit nennen die allein bei dieſer Art von Transport angewandt werden kann. Wenn z. B. ein Fuhrmann für den Transport von 1000 Kilogrammen auf 10 Meilen eine Fracht von 10 Thalern verlangt auf gewiſſen Straßen, ſo wird derſelbe für dieſelbe Laſt und dieſelbe Entfernung 20 Thaler Fracht verlangen, wenn wegen des ſchlechten Zuſtandes der Straße die doppelte Anzahl von Pferden erforderlich iſt, ſo daß alſo wieder die Arbeit, wie wir ſie definirt haben, die wahre Grundlage bei dieſen Beſtimmungen bildet.

Berechnung der Reibungen bei den Anwendungen.

§. 60. Wir wollen uns nun mit den in den Maschinen statt findenden Reibungen beschäftigen, indem wir uns auf die allgemeinen Fälle beschränken, welche gewöhnlich bei den Anwendungen vorkommen.

Nach den bekannten Versuchen über die Reibung findet zwischen dem Normaldrucke auf die Berührungsflächen und der Tangentialkraft, welche die Reibung genannt wird, ein von der Geschwindigkeit der Bewegung unabhängiges konstantes Verhältniß statt, und man findet in den Lehrbüchern der praktischen Mechanik die Tabelle dieser Verhältnisse für die bei den Maschinen am häufigsten angewandten festen Körper. Zur Bestimmung der von den Reibungen herrührenden Verluste an Arbeit muß man kennen: 1) die auf die Berührungspunkte wirkenden Druckkräfte und 2) das Element des Fortgleitens der ursprünglichen Berührungspunkte in Beziehung auf einander während des Stattfindens der Reibung. Da die Bestimmung der Druckkräfte das Nächste ist, womit man sich bei dieser Untersuchung beschäftigen muß, so wollen wir zuvörderst an einem Beispiele zeigen, welchen Gang man dabei befolgen muß.

Wir wollen uns ein festes System denken, welches sich um eine horizontale Axe dreht, die mit zwei Zapfen an ihren Enden auf festen Lagern ruht, und annehmen, daß auf dieses System zwei äußere Kräfte P, P' wirken, welche in Normalebenen auf dieser Axe liegen, und deren Momente in Beziehung auf diese Axe Pp, $P'p'$ sind. Ferner seien α, α' die Winkel, welche die Richtung dieser Kräfte mit der Horizontale bilden und Π bezeichne das Gewicht des Systemes.

Die auf die Zapfen wirkenden Kräfte müssen so beschaffen sein, daß zwischen den äußern Kräften und den Kräften, welche den Molekulen des Systemes, wenn sie völlig frei wären, die Bewegung ertheilen könnten, welche sie wirklich annehmen, Aequivalenz statt findet. Da alle Kräfte in Normalebenen auf der Axe liegen, so hat man keine Komponenten nach der Richtung dieser Axen zu betrachten, und folglich nur Gleichungen aufzustellen, welche sich auf die Summen der Komponenten der in Normalebenen auf der Drehungsaxe des Systemes liegenden Kräfte beziehen, und Gleichungen, welche sich auf die Summen der Momente dieser Kräfte beziehen.

Wir wollen die Drehungsaxe zur Axe der z und den Mittelpunkt eines Zapfens zum Anfangspunkte der z nehmen, und wie gewöhnlich mit u, v die horizontalen und vertikalen Komponenten der Geschwindigkeiten bezeichnen. Es seien ζ, ζ' die Entfernungen der durch die Richtungen der Kräfte P, P' gelegten Vertikalebenen vom Anfangspunkte, l das Intervall zwischen den beiden Zapfen und ρ, ρ' die Halbmesser dieser Zapfen, welche Größen sämmtlich als gegeben angesehen werden. Ferner seien Q, Q' die

auf dieſe Zapfen wirkenden Normalkräfte und β, β' die Winkel, welche die Richtungen dieſer Kräfte mit den in ihren Vertikalebenen, die auf der Drehungsaxe ſenkrecht ſtehen, wenn die Zapfen cylindriſch ſind, gezogenen Horizontalen bilden, wo dieſe vier Größen Q, Q', β, β' zu beſtimmen ſind, und endlich ſeien f, f' die Verhältniſſe der Reibungen zu den Normaldruckkräften.

Wenn man bemerkt, daß Q und fQ auf einander ſenkrecht ſind, ſo iſt der Sinus des Winkels, welchen die Reibung fQ mit der Horizontale bildet, offenbar $= -\cos\beta$ und der Koſinus deſſelben Winkels $= \sin\beta$, und da die Kräfte P, P' nach der Vorausſetzung das Syſtem im entgegengeſetzten Sinne zu drehen ſtreben; ſo geben die ſechs Gleichungen der Aequivalenz der auf einen feſten Körper wirkenden Kräfte die fünf folgenden Gleichungen, indem die ſechste von ſelbſt erfüllt wird, weil ſie ſich auf die Summe der Komponente nach der Richtung der Rotationsaxe bezieht, welche ſämmtlich Null ſind:

$$\Sigma \frac{p}{g} \cdot \frac{du}{dt} = P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + Q\cos\beta + Q'\cos\beta' + fQ\sin\beta + f'Q'\sin\beta',$$

$$\Sigma \frac{p}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = P\sin\alpha + P'\sin\alpha' + Q\sin\beta + Q'\sin\beta' - fQ\cos\beta - f'Q'\cos\beta',$$

$$\Sigma \frac{p}{g}\left(x\frac{dv}{dt} - y\frac{du}{dt}\right) = Pp - P'p' - fQ\rho - f'Q'\rho',$$

$$\Sigma \frac{p}{g} z\frac{dv}{dt} = \zeta P\sin\alpha + \zeta' P'\sin\alpha' + lQ\sin\beta - lfQ\cos\beta,$$

$$\Sigma \frac{p}{g} z\frac{du}{dt} = \zeta P\cos\alpha + \zeta' P'\cos\alpha' + lQ\cos\beta + lfQ\sin\beta.$$

Wenn ϑ den Winkel bezeichnet, welchen eine durch die Drehungsaxe gelegte Ebene beſchreibt, indem ſie mit dem Syſteme herumbewegt wird, und r den von der Axe nach einem beliebigen Punkte des Körpers gezogenen Radiusvektor; ſo hat man:

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta,$$

folglich:

$$dx = -y\,d\vartheta, \quad dy = x\,d\vartheta,$$

$$u = -y\frac{d\vartheta}{dt}, \quad v = x\frac{d\vartheta}{dt},$$

$$\frac{du}{dt} = -x\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - y\frac{d^2\vartheta}{dt^2}; \quad \frac{dv}{dt} = -y\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + x\frac{d^2\vartheta}{dt^2};$$

oder wenn man $\frac{d\vartheta}{dt} = \omega$ ſetzt:

$$\frac{du}{dt} = -\omega^2 x - y\frac{d\omega}{dt}; \quad \frac{dv}{dt} = -\omega^2 y + x\frac{d\omega}{dt}.$$

Vermittelst dieser Werthe verwandeln sich die fünf Gleichungen der Bewegung in folgende:

$$-\frac{\omega^2}{g}\Sigma px - \frac{1}{g}\cdot\frac{d\omega}{dt}\Sigma py$$
$$= P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + Q\cos\beta + Q'\cos\beta' + fQ\sin\beta + f'Q'\sin\beta',$$
$$-\frac{\omega^2}{g}\Sigma py + \frac{1}{g}\cdot\frac{d\omega}{dt}\Sigma px$$
$$= P\sin\alpha + P'\sin\alpha' + Q\sin\beta + Q'\sin\beta' - fQ\cos\beta - f'Q'\cos\beta',$$
$$\frac{1}{g}\cdot\frac{d\omega}{dt}\Sigma pr^2 = Pp - P'p' - fQ\rho - f'Q'\rho',$$
$$-\frac{\omega^2}{g}\Sigma pyz + \frac{1}{g}\cdot\frac{d\omega}{dt}\Sigma pxz = \zeta P\sin\alpha + \zeta' P'\sin\alpha' + lQ\sin\beta - lfQ\cos\beta,$$
$$-\frac{\omega^2}{g}\Sigma pxz + \frac{1}{g}\cdot\frac{d\omega}{dt}\Sigma pyz = \zeta P\cos\alpha + \zeta' P'\cos\alpha' + lQ\cos\beta + lfQ\sin\beta.$$

Bei den gewöhnlichen Anwendungen liegt der Schwerpunkt des Systems auf der Drehungsaxe, und es ist folglich:

$$\Sigma px = 0, \quad \Sigma py = 0.$$

Ferner wird der Körper gewöhnlich von einer Rotationsfläche begrenzt, deren Axe mit der Drehungsaxe zusammenfällt, oder wenigstens ist dieser Körper in Beziehung auf die Ebene der xz und die der yz symmetrisch, und folglich hat man:

$$\Sigma pxz = 0, \quad \Sigma pyz = 0,$$

weil diese Summen aus Gliedern bestehen, welche paarweise einander gleich und von entgegengesetztem Zeichen sind. In diesem Falle verwandeln sich also die fünf Gleichungen der Bewegungen in folgende:

(1) $P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + Q(\cos\beta + f\sin\beta) + Q'(\cos\beta' + f'\sin\beta') = 0,$

(2) $P\sin\alpha + P'\sin\alpha' + Q(\sin\beta - f\cos\beta) + Q'(\sin\beta' - f'\cos\beta') = 0.$

(3) $$\frac{d\omega}{dt}\cdot\Sigma\frac{p}{g}r^2 = Pp - P'p' - fQ\rho - f'Q'\rho',$$

(4) $$\zeta P\sin\alpha + \zeta' P'\sin\alpha' + lQ(\sin\beta - f\cos\beta) = 0,$$

(5) $$\zeta P\cos\alpha + \zeta' P'\cos\alpha' + lQ(\cos\beta + f\sin\beta) = 0.$$

Setzen wir:

$$(6)\quad \begin{cases} Q(\cos\beta + f\sin\beta) = X; & Q'(\cos\beta' + f'\sin\beta') = X'; \\ Q(\sin\beta - f\cos\beta) = Y; & Q'(\sin\beta' - f'\cos\beta') = Y'; \end{cases}$$

folglich:

$$(7)\quad Q = \sqrt{\frac{X^2+Y^2}{1+f^2}},\ Q' = \sqrt{\frac{X'^2+Y'^2}{1+f^2}},$$

so geben die Gleichungen (1), (2), (4) und (5):

$$(8)\quad \begin{cases} X = -\dfrac{\zeta P\cos\alpha + \zeta' P'\cos\alpha'}{l}, \\ Y = -\dfrac{\zeta P\sin\alpha + \zeta' P'\sin\alpha'}{l}, \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} X' = -\dfrac{(l-\zeta)P\cos\alpha + (l-\zeta')P'\cos\alpha'}{l}, \\ Y' = -\dfrac{(l-\zeta)P\sin\alpha + (l-\zeta')P'\sin\alpha'}{l}. \end{cases}$$

Um die Punkte zu finden, worin die Reibungen statt finden, muß man die Größen $\cos\beta$, $\sin\beta$, $\cos\beta'$, $\sin\beta'$ bestimmen. Aus den Gleichungen (6) ergeben sich aber die Ausdrücke:

$$(10)\quad \cos\beta = \frac{X - fY}{Q(1+f^2)};\quad \sin\beta = \frac{Y - fX}{Q(1+f^2)};$$

$$(11)\quad \cos\beta' = \frac{X' - f'Y'}{Q'(1+f'^2)};\quad \sin\beta' = \frac{Y' + f'X'}{Q'(1+f'^2)},$$

in welche man für Q, Q' ihre Werthe (7) und dann für X, Y, X', Y' ihre Werthe (8) und (9) setzen müßte.

Zur Vereinfachung der Rechnungen wollen wir mit φ den Winkel bezeichnen, dessen Tangente f ist, durch R, R' die resp. Resultanten aus X, Y und X', Y' und mit a, a' die Winkel, welche R, R' mit der Horizontale bilden, und endlich wollen wir annehmen, wie es auch gewöhnlich der Fall ist, daß die Verhältnisse f und f' einander gleich sind.

Da die Kraft R die Resultante aus der Summe X der horizontalen Komponenten von Q und von fQ und aus der Summe Y der vertikalen Komponenten dieser beiden letzten Kräfte ist; so hat man:

$$R = \sqrt{X^2+Y^2},$$

und da $\frac{1}{\sqrt{1+f^2}} = \cos\varphi$ ist, so verwandeln sich die Werthe von Q und Q′ in folgende:

$$Q = R\cos\varphi,$$
$$Q' = R'\cos\varphi,$$

und außerdem hat man:

$$X = R\cos\alpha, \quad Y = R\sin\alpha,$$
$$X' = R'\cos\alpha', \quad Y' = R'\sin\alpha'.$$

Vermittelst dieser Werthe können die Gleichungen (10) und (11), welche die Werthe von $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\sin\beta'$, $\cos\beta'$ geben, auf folgende Form gebracht werden:

$$\cos\beta = \cos(\alpha+\varphi), \quad \sin\beta = \sin(\alpha+\varphi),$$
$$\cos\beta' = \cos(\alpha'+\varphi), \quad \sin\beta' = \sin(\alpha'+\varphi),$$

woraus folgt:

$$\beta = \alpha+\varphi, \quad \beta' = \alpha'+\varphi.$$

Die in der Gleichung (3) vorkommende Größe $\Sigma\frac{p}{g}r^2$ wird gewöhnlich das Trägheitsmoment des Systemes in Beziehung auf die Drehungsaxe genannt, und wenn man dasselbe mit k bezeichnet; so kann die Gleichung (3) auf folgende Form gebracht werden:

$$k\frac{d\omega}{dt} = Pp - P'p' - \sin\varphi\,(R\rho + R'\rho'),$$

oder wenn man $\rho' = \rho$ setzt, wie es häufig der Fall ist:

$$k\frac{d\omega}{dt} = Pp - P'p' - \rho\sin\varphi\,(R+R').$$

Diese Gleichung dient zur Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit, wenn man die Kräfte P, P′ für jeden Augenblick kennt. Gewöhnlich sind diese Kräfte zu einander parallel, oder auf einander senkrecht. Wenn sie parallel sind, so wirken sie gewöhnlich nach der Richtung der Vertikale von oben nach unten, und wenn man die Axe der y in der Richtung dieser Kräfte nimmt, so hat man:

$$\alpha = \alpha' = 270^0, \quad \sin\alpha = \sin\alpha' = -1, \quad \cos\alpha = \cos\alpha' = 0,$$

folglich:

$$X=0,\ Y=\frac{\zeta P+\zeta' P'}{l},$$

$$X'=0,\ Y'=\frac{(l-\zeta)P+(l-\zeta')P'}{l}.$$

Es iſt mithin:

$$Q=Y,\quad Q'=Y';$$

aber:

$$\alpha=\alpha'=90^0,\quad \sin\alpha=\sin\alpha'=1,$$

folglich:

$$Y=R,\quad Y'=R';$$

alſo:

$$R+R'=Y+Y'=P+P'$$

und die Gleichung für die Winkelbewegung verwandelt ſich in folgende:

$$k\,\frac{d\omega}{dt}=Pp-P'p'-\rho\cos\varphi\,(P+P').$$

Wenn die Kräfte P, P' auf einander ſenkrecht ſind, und $\alpha=180^0$, $\alpha'=270^0$ iſt, folglich:

$$\sin\alpha=0,\ \cos\alpha=-1,\ \sin\alpha'=-1,\ \cos\alpha'=0,$$

ſo kommt:

$$X=\frac{\zeta P}{l},\qquad Y=\frac{\zeta' P'}{l},$$

$$X'=\frac{(l-\zeta)P}{l},\quad Y'=\frac{(l-\zeta')P'}{l}.$$

Aus den Gleichungen:

$$X=R\cos\alpha\ \text{und}\ Y=R\sin\alpha$$

ergibt ſich:

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{X}{Y},$$

folglich:

$$\text{tang}\, a = \frac{\zeta P}{\zeta' P'},$$

und ebenso ist:

$$\text{tang}\, a' = \frac{(l-\zeta)P}{(l-\zeta')P'}.$$

Die übrigen Größen werden wie in dem allgemeinen Falle bestimmt. Wenn die Kräfte P, P′ während der Bewegung der Größe und Richtung nach konstant sind, so werden die von den Zapfenreibungen herrührenden Verluste an Arbeit für die Sekunde ausgedrückt durch:

$$2\pi n \rho f Q \quad \text{und} \quad 2\pi n \rho' f' Q',$$

wo n die Anzahl der Umdrehungen in der Zeiteinheit bezeichnet, und wenn $f' = f$, $\rho' = \rho$ ist, so wird der Totalverlust ausgedrückt durch:

$$2\pi n \rho f (Q + Q'),$$

wo die Druckkräfte Q, Q′ nach den frühern Formeln berechnet werden.

Berechnung des Druckes, welchen zwei Zähne des Eingriffes zweier Rotationssysteme, deren Bewegung nicht gleichförmig ist, auf einander ausüben.

§. 61. Wir wollen nun zwei Rotationssysteme betrachten, welche in Zapfenlagern ruhen, und in ihrer Bewegung durch den Eingriff zweier Zahnräder mit einander verbunden und deren Axen parallel sind. Wir wollen annehmen, daß eine von einem beliebigen Beweger herrührende Kraft P (Fig. 11) auf das erste System in A in einer Entfernung p von der Drehungsaxe dieses Systemes und eine Widerstandskraft P′ in C auf das zweite System in einer Entfernung p' von seiner Drehungsaxe wirkt; so entsteht in dem Berührungspunkte B zweier Zähne des Eingriffes ein gegenseitiger Druck Q, welcher nach der Richtung der Normale in dem Berührungspunkte wirkt. Wenn man sich durch den Punkt B eine auf den beiden Drehungsaxen senkrechte Ebene denkt, so bestimmt dieselbe auf diesen Axen zwei Punkte, welche man die Mittelpunkte der beiden Systeme nennen kann. Es seien q, q' die aus diesen Mittelpunkten auf die Normale im Punkte B und s, s' die aus denselben Punkten auf die Tangente gefällten Perpendikel. Ferner bezeichne f das Verhältniß der Reibung zum

Drucke, so läßt sich die gegenseitige Einwirkung der beiden Zähne im Berührungspunkte in eine Normalkraft Q und in eine Tangentialkraft fQ zerlegen. Wir wollen zunächst die Zapfenreibungen unberücksichtigt lassen, mit ω die Winkelgeschwindigkeit des ersten Systemes und mit k das Trägheitsmoment desselben in Beziehung auf die Drehungsaxe bezeichnen; so haben wir die Gleichung der Momente:

$$k\frac{d\omega}{dt} = Pp - Qq \mp fQs. \qquad (A)$$

Wenn wir durch dieselben accentuirten Buchstaben die analogen Größen für das zweite System bezeichnen, so haben wir die zweite Gleichung:

$$k'\frac{d\omega'}{dt} = -P'p' + Qq' \pm f'Qs', \qquad (B)$$

wo die Wahl des obern oder untern Zeichens von dem Sinne des Gleitens, welcher sich nach gewissen Bedingungen ändern kann, wie wir später zeigen werden, abhängt.

Die Winkelgeschwindigkeiten ω und ω' sind durch die Bedingung der Berührung mit einander verbunden; denn wenn man die Bewegung während eines unendlich kleinen Zeittheilchens betrachtet, so kann man annehmen, daß das Berührungselement parallel zu sich selbst fortrückt, und wenn alsdann die Berührung noch statt finden soll; so müssen die Geschwindigkeiten beider Körper im Berührungspunkte gleiche Normalkomponenten haben. Aber diese Normalkomponenten des kleinen von dem Berührungspunkte beschriebenen Weges sind resp. den in derselben Zeit von den Fußpunkten der Perpendikel q, q' beschriebenen kleinen Bogen gleich, und da sich diese Perpendikel während derselben Zeit nur unendlich wenig ändern; so kann man diese kleinen Bogen, als Kreisbogen von den Halbmessern q, q' betrachten. Die Bedingung ihrer Gleichheit wird folglich ausgedrückt durch:

$$qd\omega = q'd\omega'.$$

Da bei den gewöhnlichen Verzahnungen der Berührungspunkt zweier Zähne nahezu in der Ebene der beiden Axen liegt, so sind die Verhältnisse $\frac{q}{s}\ \frac{q'}{s'}$ einander gleich. Wenn man Q zwischen den Gleichungen (A), (B) eliminirt und die Gleichheit dieser Verhältnisse berücksichtigt, so findet man:

$$kq'\frac{d\omega}{dt} + k'q\frac{d\omega'}{dt} = Ppq' - P'p'q,$$

und da aus der Relation $qd\omega = q'd\omega'$ folgt $q\,\frac{d\omega}{dt} = q'\,\frac{d\omega'}{dt}$, so verwandelt sich die letzte Gleichung in folgende:

$$\left(\frac{kq'^2 + k'q^2}{q'}\right)\frac{d\omega}{dt} = Ppq' - P'p'q,$$

oder:

$$\left(k + k'\,\frac{q^2}{q'^2}\right)\frac{d\omega}{dt} = Pp - P'p'.\frac{p}{q'}.$$

Man kann diese letzte Gleichung leicht im Gedächtnisse behalten, wenn man bemerkt, daß man für ein Rotationssystem, wenn die Zapfenreibungen wieder unberücksichtigt bleiben, hätte:

$$k\,\frac{d\omega}{dt} = Pp - P'p'.$$

Um also auch das zweite System in Betracht zu ziehen, multiplicirt man das Moment des Widerstandes P' dieses zweiten Systemes mit dem Koefficienten $\frac{q}{q'}$ und addirt zugleich zu dem Trägheitsmomente k des ersten Systemes das Produkt aus dem Trägheitsmomente k' des zweiten und aus dem Quadrate des Verhältnisses $\frac{q}{q'}$.

Wenn die Berührungsebene in dem Berührungspunkte der beiden Zähne durch die Axen der beiden Systeme geht, wie dieses gewöhnlich der Fall ist, und man bezeichnet mit r, r' die von den Mittelpunkten der Systeme nach dem Berührungspunkte der Zähne gehenden Radienvektoren; so ist $q = r$, $q' = r'$ und die vorhergehende Gleichung für beide Systeme verwandelt sich alsdann in folgende:

$$\left(k + k'\,\frac{r^2}{r'^2}\right)\frac{d\omega}{dt} = Pp - P'p'.\frac{r}{r'},$$

woraus folgt:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Pp - P'p'.\frac{r}{r'}}{k + k'.\frac{r^2}{r'^2}}.$$

Da in diesem Falle s, s' Null, oder wenigstens sehr klein sind, so hat die Reibung in den obigen Gleichungen (A), (B) nur wenig Einfluß, und man kann setzen:

$$k\frac{d\omega}{dt} = Pp - Qr, \quad k'\frac{d\omega'}{dt} = -P'p' + Qr'.$$

Wenn man in die erste dieser beiden Gleichungen den Werth von $\frac{d\omega}{dt}$ substituirt, so findet man:

$$Q = \frac{kP'p'r' + k'Ppr}{kr^2 + k'r^2} = \frac{\frac{k}{r^2}P'\frac{p'}{r'} + \frac{k'}{r'^2}P\frac{p}{r}}{\frac{k}{r^2} + \frac{k'}{r'^2}}.$$

Zur Vereinfachung dieses Werthes wollen wir $\frac{Pp}{r} = P_1$, $\frac{P'p'}{r'} = P'_1$ setzen, so kommt:

$$Q = \frac{\frac{k}{r^2}P'_1 + \frac{k'}{r'^2}P_1}{\frac{k}{r^2} + \frac{k'}{r'^2}}.$$

Für die Koefficienten $\frac{k}{r^2}$, $\frac{k'}{r'^2}$ kann man Gewichte Π, Π' setzen, welche in dem Berührungspunkte der Zähne angebracht, in Beziehung auf die resp. Axen der beiden betrachteten Systeme dieselben Trägheitsmomente haben würden; denn es wäre alsdann z. B. $\Pi r^2 = k$, folglich $\frac{k}{r^2} = \Pi$, und man kann folglich setzen:

$$Q = \frac{\Pi P'_1 + \Pi' P_1}{\Pi + \Pi'}. \qquad (Z)$$

Diese Gleichung läßt sich leicht auf den Fall mehrerer rotirender Systeme erstrecken, und man würde alsdann finden, daß Π das Gewicht bezeichnen müßte, welches in die Berührungspunkte gebracht und mit einem der berührenden Zähne fest verbunden, so daß es dessen Geschwindigkeit annähme, dieselbe lebendige Kraft haben würde, als die Gesammtheit der Rotationssysteme, welche auf der diesem Zahn entsprechenden Seite liegen, und das Gewicht Π' würde für die dem andern Zahne und der andern Seite der Berührung entsprechenden Rotationssysteme eine ganz analoge Bedeutung haben.

Aus dem vorhergehenden Ausdrucke von Q ergiebt sich also folgender Lehrsatz:

Wenn man für einen Inbegriff rotirender Systeme, welche einander durch Verzahnungen in Bewe-

wegung setzen, für jede Seite der Berührung in der Ordnung oder Folge der Uebertragung der Bewegung die Kraft berechnet, welche in dem Berührungspunkte angebracht, alle übrigen ersetzen kann, so wie das Gewicht, welches in diesem Punkte, mit dem Zahne fest verbunden, also seine Geschwindigkeit habend, dieselbe lebendige Kraft haben würde, als alle Rotationssysteme auf dieser nämlichen Seite, dann jede Kraft durch das der entgegengesetzten Seite entsprechende Gewicht multiplicirt und die Summe der Produkte durch die Summe dieser Gewichte dividirt; so erhält man den Druck, welchen zwei Zähne während der Bewegung auf einander ausüben.

Wenn die Kräfte P, P′ in einer solchen Beziehung zu einander ständen, daß sie weder Bewegung hervorbringen, noch die bereits stattfindende Bewegung verändern könnten, d. h. wenn diese Kräfte einander das Gleichgewicht hielten, so wären die fingirten Kräfte P_1, P'_1 einander gleich, und man hätte folglich in diesem Falle:

$$Q = P_1 = P'_1$$

wie bekannt ist. Alsdann verschwinden die Trägheitsmomente als gemeinschaftliche Faktoren, wie zu erwarten war, weil die Auflösung der Aufgabe nur noch von statischen Betrachtungen abhängt.

Aus der vorhergehenden Formel (Z) ergibt sich eine wichtige und wohl zu beachtende Folgerung.

Bei vielen Anwendungen ist nämlich die Wirkung einer der Kräfte, z. B. P'_1 intermittirend, d. h. die Intensität dieser Kraft ändert sich auch während desselben Umganges des Systemes beträchtlich, was namentlich der Fall ist, wenn Hämmer, oder Stampfer in Bewegung gesetzt werden sollen. In diesem Falle wirkt die Kraft P′ nur nach Intervallen, indem sie in gewissen Augenblicken Null ist, und dann wieder mit einer ziemlich beträchtlichen Intensität wirkt. Nun sieht man aber aus der vorhergehenden Gleichung, daß der im Berührungspunkte stattfindende Druck Q zwar seinen Werth mit P_1' zu gleicher Zeit ändert; aber doch um so weniger, je kleiner der Koefficient von P_1' gegen den von P_1 ist, so daß folglich der Einfluß einer der Kräfte P_1' auf den Druck Q durch die Größe des Koefficienten Π′ für das entsprechende System vermindert wird. Will man also den Druck zwischen den Zähnen eines Räderwerkes, welches die Bewegung auf einen großen Schmiedehammer überträgt möglichst gleichförmig machen, so muß das Rotationssystem zwischen den Zähnen und dem Hammer in Beziehung auf den Berührungspunkt der Zähne ein möglichst großes Trägheitsmoment haben.

Wenn man nach dem im Berührungspunkte stattfindenden Drucke Q die Reibungen berechnen will, so braucht man den Druck

zuvörderſt nur nach den vorhergehenden Formeln zu berechnen, indem man die Reibungen unberückſichtigt läßt, und dann den ſo erhaltenen Werth von Q zur Berechnung dieſer Reibungen anwendet. Der hierbei begangene Fehler iſt offenbar ſehr klein.

Reibung der Zahnräderwerke.

§. 62. Um ſogleich alle möglichen Fälle in dieſelbe Formel zuſammen zu faſſen, wollen wir annehmen, daß die Ebenen der beiden Räder einen gewiſſen Winkel ϑ miteinander bilden, und dieſe Räder folglich Kegelräder ſind. Wir wollen mit Q wieder den im Berührungspunkte ſtattfindenden Normaldruck bezeichnen, ſo iſt derſelbe nahezu auf der Ebene der Drehungsaxen ſenkrecht, und r, r' ſeien wieder die Entfernungen des Berührungspunktes von dieſen Axen. Ferner ſeien ϑ, ϑ' die ſehr kleinen Winkel, um welche ſich die beiden Räder in einem beliebigen Augenblicke der Dauer der Berührung zweier Zähne von dem Augenblicke an, wo der Berührungspunkt in die Ebene der Axen tritt, gedrehet haben. Da die Normalkomponenten der Geſchwindigkeiten der Berührungspunkte vermöge der Bedingung der Berührung ſelbſt gleich ſein müſſen, ſo hängt die Geſchwindigkeit des Gleitens oder die relative Geſchwindigkeit nur von den Tangentialkomponenten der wirklichen Geſchwindigkeiten ab. Wenn man ferner zwei gleichzeitige Geſchwindigkeiten v, v' betrachtet, welche durch die geraden Linien AB, AC (Fig. 12) dargeſtellt werden, ſo wird die reſultirende Geſchwindigkeit durch die dritte Seite AD des Dreieckes ABD ausgedrückt, welches man erhält, wenn man die beiden geraden Linien, welche die Geſchwindigkeiten darſtellen, mit ihren Endpunkten in ihren urſprünglichen Richtungen aneinander legt. Aber für die relative Geſchwindigkeit, d. h. für die Reſultante aus zwei Geſchwindigkeiten AB und BE = AC, wovon die letztere eine der frühern entgegengeſetzte Richtung hat, iſt die dritte Seite des Dreieckes ABE oder die dritte Seite BC des Dreieckes ABC, welches von den beiden von demſelben Punkte A ausgehenden gegebenen Geſchwindigkeiten gebildet wird, der geometriſche Ausdruck. Die abſoluten Geſchwindigkeiten in dem Berührungspunkte ſind für einen beliebigen Augenblick:

$$r\frac{d\vartheta}{dt} \quad \text{und} \quad r'\frac{d\vartheta'}{dt},$$

und wenn man ſie auf die Berührungsebene, welche ſehr wenig von der Ebene der Rotationsaxe verſchieden iſt, projicirt; ſo hat man:

$$r\frac{d\vartheta}{dt}\sin\vartheta, \quad \text{und} \quad r'\frac{d\vartheta'}{dt}\sin\vartheta'$$

oder nahezu:

$$\frac{r\vartheta d\vartheta}{dt}, \quad \text{und} \quad \frac{r\vartheta' d\vartheta'}{dt}.$$

Der Winkel, welchen dieſe Tangentialkomponenten mit einander bilden, iſt ferner dem Winkel δ gleich, welchen die Ebenen der beiden Räder mit einander bilden und die Geſchwindigkeit des Gleitens, welche durch die dritte Seite des aus dieſen beiden Komponenten konſtruirten Dreieckes ausgedrückt wird, iſt folglich:

$$\frac{1}{dt}\sqrt{r^2\vartheta^2 d\vartheta^2 + r'^2\vartheta'^2 d\vartheta'^2 - 2rr'\vartheta\vartheta' d\vartheta d\vartheta' \cdot \cos\delta}.$$

Aber die abſoluten Geſchwindigkeiten ſind ſehr wenig von den Normalgeſchwindigkeiten verſchieden, weil die Berührungsebene ſehr wenig von der Ebene der Drehungsaxe verſchieden iſt, und da die Normalgeſchwindigkeiten einander gleich ſein müſſen, wenn die Berührung der Zähne ſtatt finden ſoll; ſo müſſen auch die wirklichen Geſchwindigkeiten nahezu einander gleich ſein. Man kann daher ſetzen:

$$r\frac{d\vartheta}{dt} = r'\frac{d\vartheta'}{dt},$$

und der vorhergehende Ausdruck verwandelt ſich mithin in folgenden:

$$\frac{rd\vartheta}{dt}\sqrt{\vartheta^2 + \vartheta'^2 - 2\vartheta\vartheta'\cos\delta}.$$

Wenn n, n' die Anzahlen der Zähne der beiden Räder bezeichnen, ſo hat man:

$$n'\vartheta' = n\vartheta, \quad \text{folglich} \quad \vartheta' = \frac{n\vartheta}{n'}.$$

Die Geſchwindigkeit des Gleitens wird folglich ausgedrückt durch:

$$\frac{rn\vartheta d\vartheta}{dt}\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n'^2} - \frac{2\cos\delta}{nn'}}.$$

Das der Reibung entſprechende Arbeitselement wird erhalten, wenn man dieſe Geſchwindigkeit mit $fQdt$ multiplicirt, wo f wieder

das Verhältniß der Reibung zu dem Drucke Q bezeichnet, und folglich wird dieses Arbeitselement ausgedrückt durch:

$$fQrn\vartheta d\vartheta \sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n'^2}-\frac{2\cos\delta}{nn'}},$$

Da der Druck Q während der Dauer der Berührung zweier Zähne als konstant betrachtet werden kann, so integrirt man den vorhergehenden Ausdruck in dieser Voraussetzung. Die zwischen den beiden Zähnen von dem Augenblicke an, wo ihre Berührung in der Ebene der Drehungsaxen statt findet, bis zu dem Augenblicke, wo das erste Rad den Winkel ϑ_1 beschrieben hat, statt findende Reibung konsumirt also eine Quantität Arbeit, welche ausgedrückt wird durch:

$$\frac{1}{2} fQrn\vartheta_1^2 \sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n'^2}-\frac{2\cos\delta}{nn'}}.$$

Die dem Normaldrucke Q während derselben Zeit entsprechende Quantität Arbeit ist gleich $Qr\vartheta_1$, und wenn man sie mit T bezeichnet, so wird die von der Reibung konsumirte Quantität Arbeit ausgedrückt durch:

$$\frac{1}{2} fn\vartheta_1 T \sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n'^2}-\frac{2\cos\delta}{nn'}}$$

Aber wenn man in dem Augenblicke, wo die Berührung zwischen den beiden betrachteten Zähnen aufhört, zwei andere Zähne in der Ebene der Aren sich zu berühren anfangen, wie die beiden ersten, so ist $n\vartheta_1 = 2\pi$, und die der Reibung entsprechende Arbeit wird folglich ausgedrückt durch:

$$\pi f T \sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n'^2}-\frac{2\cos\delta}{nn'}}.$$

Da derselbe Ausdruck auf alle successiven Paare von Zähnen anwendbar ist, so braucht man, um die der Reibung entsprechende Arbeit für eine gegebene Dauer der Bewegung zu erhalten, nur T als die dem Drucke Q für dieselbe Dauer entsprechende Arbeit zu betrachten, und da diese Arbeit T wenig von der auf das Rad übertragenen Arbeit verschieden ist; so kann man die eine für die andere nehmen, d. h. die Zapfenreibung unberücksichtigt lassen.

Es kann geschehen, daß die Berührung der Zähne unter der Ebene der Drehungsaxen anfängt. Wenn man alsdann für dieses Gleiten denselben Koefficienten f nimmt, und mit ϑ_2 den Winkel bezeichnet, welchen die durch den Berührungspunkt gehende Meridianebene von dem Anfange der Berührung an bis zu dem Augenblicke beschreibt, wo der Berührungspunkt in die Ebene

der Drehungsaxen fällt; so hat man für die der Reibung der beiden Zähne an einander entsprechende Arbeit den Ausdruck:

$$\frac{1}{2} n f Q r (\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2) \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n'^2} - \frac{2\cos\delta}{nn'}}.$$

Wir wollen der Kürze wegen $\vartheta_2 = \alpha\vartheta_1$ setzen, so ist:

$$n\vartheta_1(1+\alpha) = 2\pi,$$
$$T = Qr\vartheta_1(1+\alpha),$$
$$\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 = \vartheta_1^2(1+\alpha^2),$$

folglich:

$$nQr\vartheta_1^2(1+\alpha)^2 = 2\pi T,$$

und wenn man diese Relationen anwendet; so erhält man für die der Reibung entsprechende Arbeit den Ausdruck:

$$\frac{f\pi T(1+\alpha^2)}{(1+\alpha)^2} \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n'^2} - \frac{2\cos\delta}{nn'}},$$

welcher für $\alpha = 1$ oder $\vartheta_2 = \vartheta_1$, d. h. wenn die Berührung der Zähne in gleichen Winkelabständen unter und über der Ebene der Drehungsaxe anfängt und aufhört, ein Minimum wird, und ist alsdann nur halb so groß, als wenn die Berührung der Zähne ganz auf derselben Seite der Ebene der Drehungsaxen statt findet.

Wenn die Räder in derselben Ebene, aber außerhalb einander liegen, wie dieses gewöhnlich der Fall ist; so ist $\delta = 180^0$, also $\cos\delta = -1$ und der vorhergehende Ausdruck reducirt sich alsdann in dem Falle des Maximums, d. h. für $\alpha = 0$ oder für $\alpha = \infty$ auf:

$$f\pi T\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right).$$

Dieser letzte Ausdruck für den von der Reibung der Verzahnungen herrührenden Verlust an Arbeit wird gewöhnlich angewandt und rührt von Poncelet her.

Wenn das eine Rad innerhalb des andern liegt, so ist $\delta = 0$, folglich $\cos\delta = 1$ und der Ausdruck für die durch die Reibung verlorne Quantität Arbeit geht alsdann in folgende über:

$$f\pi T\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right),$$

deſſen Werth offenbar viel kleiner iſt, als wenn das eine Rad außerhalb des andern liegt.

Wenn die Verzahnungen neu ſind, ſo berührt ſich immer nur ein Paar von Zähnen, obgleich die Verzahnungen ſo eingerichtet ſind, daß ſich zugleich mehrere Paare von Zähnen berühren müßten. In dieſem Falle bezeichnen n, n' in den vorhergehenden Formeln nicht mehr die Anzahlen der Zähne der Räder, ſondern blos die Anzahlen von Zähnen, welche ſich während einer Umdrehung berühren. Wenn z. B. die Berührungen immer nur um den zweiten Zahn ſtatt finden, ſo werden die von der Reibung herrührenden Verluſte an Arbeit verdoppelt, weil ſie im umgekehrten Verhältniſſe der Zahlen n und n' ſtehen, und dieſer Zuſtand der Verzahnung dauert ſo lange fort, bis die einander berührenden Zähne durch die Reibung ſo weit abgenutzt ſind, daß die übrigen einander auch erreichen und auf einander wirken. Es iſt alſo der von den Reibungen herrührende Verluſt an Arbeit bei den ſchon einige Zeit gebrauchten Räderwerken nicht blos deshalb geringer, weil ſich die Zähne an einander abgeſchliffen oder polirt haben, ſondern weil alsdann der Eingriff erſt ein regelmäßiger wird.

Berechnung der Reibung für die ſchiefe Ebene und den Keil.

§. 63. Auf einer ſchiefen Ebene (Fig. 13) liege ein Keil, oder ein beliebiger anderer Körper, welcher vermöge eines Gewichtes P ſich längs dieſer Ebene herabzubewegen ſtrebt, während eine horizontale Kraft R denſelben aufwärts zu bewegen ſucht. Wenn man die Normalkomponente der Summe der Widerſtände, welche die ſchiefe Ebene auf den Keil ausübt mit N und das Verhältniß der Reibung zu dem Drucke mit f bezeichnet; ſo iſt fN der Ausdruck der Reibung, und für das Gleichgewicht des Keiles muß man zwiſchen den vertikalen Komponenten der verſchiedenen Kräfte die Relation:

$$P + f N \sin\alpha - N\cos\alpha = 0,$$

und zwiſchen den horizontalen Komponenten die Relation:

$$R - f N\cos\alpha - N\sin\alpha = 0$$

haben, woraus folgt, wenn man N eliminirt:

$$R = \frac{P(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{\cos\alpha - f\sin\alpha} = \frac{P(\tang\alpha + f)}{1 - f\tang\alpha}.$$

Wenn die Kraft R den Keil blos im Gleichgewichte halten

soll, so verwandelt sich das Zeichen der Komponente fN in das entgegengesetzte, und man erhält:

$$R = \frac{P(\tang \alpha - f)}{1 + f \tang \alpha}.$$

Wenn man $f = \tang \varphi$ setzt, so lassen sich die beiden vorhergehenden Formeln auf folgende Form bringen:

$$R = P \tang (\alpha \pm \varphi),$$

wo sich das obere und untere Zeichen resp. auf den Fall bezieht, wo R eine Bewegungs- oder Widerstandskraft ist. Wenn man den Werth von R im ersten und zweiten Falle resp. mit R und R′ bezeichnet, so sucht eine der beiden Kräfte R, R′ den Keil aufwärts zu bewegen, während die andern blos sein Herabgleiten zu verhindern strebt, und man hat zwischen diesen beiden Kräften die Relation:

$$R' = R. \frac{\tang (\alpha - \varphi)}{\tang (\alpha + \varphi)}.$$

Wenn $\alpha < \varphi$ ist, so ist der Werth von R′ negativ, d. h. in diesem Falle muß man auf den Keil eine Kraft ausüben, wenn er sich abwärts bewegen soll.

Es sei $BAD = \varphi$ (Fig. 14) und $DAC = DAC' = \alpha$, so verhalten sich, wenn man MN senkrecht auf AB zieht, die Längen MN, MN′ wie die Kräfte R, R′.

Wenn sich über dem Keile ein Körper befindet, welcher auf denselben eine Wirkung ausübt, aber sich nicht mit fortbewegt, wie ein zusammen zu drückender Körper; so findet auf der obern Fläche AB (Fig. 15) des Keiles eine Reibung statt. Bezeichnet P die Kraft, mit welcher der zusammen zu drückende Körper in normaler Richtung gegen die Fläche AB wirkt; so drückt $f'P$ die auf dieser Fläche stattfindende Reibung aus, und wenn man die frühern Bezeichnungen beibehält; so findet man auf dieselbe Weise, wie vorhin:

$$R = \frac{P[\sin \alpha + (f + f') \cos \alpha - ff' \sin \alpha]}{\cos \alpha - f \sin \alpha}$$

$$= \frac{P[(1 - ff') \tang \alpha + f + f']}{1 - f \tang \alpha}.$$

Diese Formel läßt sich auf den Fall anwenden, wo die Kraft R zu einer der beiden Seitenflächen des Keiles parallel ist, und für den Druck P, welchen eine zu AB parallele Kraft R auf den zusammen zu drückenden Körper ausübt, ergibt sich daraus:

$$P = \frac{R(1 - f \tan g \alpha)}{(1 - ff') \tan g \alpha + f + f'}.$$

Wenn die Kraft den Keil nur in seiner Lage zu erhalten suchte, so würde das Zeichen der Reibung geändert, und man hätte:

$$R' = \frac{P[(1 - ff') \tan g \alpha - f - f']}{1 + f \tan g \alpha}.$$

Diese Kraft wird negativ, wenn $\alpha < \varphi + \varphi'$ ist, wo φ' den Winkel bezeichnet, dessen trigonometrische Tangente f' ist, d. h. man muß diese Kraft in einer der ursprünglichen entgegengesetzten Richtung anbringen, um den Keil hinwegnehmen zu können. Zwischen den Kräften R und R′ findet die Relation statt:

$$R' = R. \frac{1 - f \tan g \alpha}{1 + f \tan g \alpha} \cdot \frac{(1 - ff') \tan g \alpha - f - f'}{(1 - ff') \tan g \alpha + f + f'}.$$

Wir wollen nun annehmen, daß die Richtung der Kraft R den von den beiden Seitenflächen des Keiles gebildeten Winkel in zwei gleiche Theile theilt, so ergibt sich leicht, wenn 2β diesen Winkel und P den auf jede der beiden Seitenflächen des Keiles ausgeübten Normaldruck bezeichnet:

$$R = 2P(\sin \beta + f \cos \beta),$$

und folglich ist der Druck P, welchen jede Seitenfläche des Keiles auf die äußern Hindernisse ausübt, wenn die Kraft R nach der Richtung der erwähnten Halbirungslinie wirkt:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{\sin \beta + f \cos \beta}.$$

Wenn man den Keil blos in seiner Lage erhalten will, so ergibt sich die dazu erforderliche Kraft R′, wenn man das Zeichen von f in das entgegengesetzte verwandelt:

$$R' = 2P(\sin \beta - f \cos \beta).$$

Diese Kraft ist negativ, wenn $\beta < \varphi$ ist und alsdann wird die Kraft, welche erforderlich ist, um den Keil hinwegnehmen zu können, ausgedrückt durch:

$$-2P(\sin \beta - f \cos \beta).$$

Zwischen den Kräften R und R′ hat man die Relation:

$$R' = R.\frac{\sin\beta - f\cos\beta}{\sin\beta + f\cos\beta} = R.\frac{\operatorname{tang}\beta - f}{\operatorname{tang}\beta + f}.$$

Diese Rechnungen sind auch auf den Fall anwendbar, wo ein massiver Kegel vermittelst eines Hebels in einen hohlen Kegel gedrückt wird, welcher sich um seine Axe drehet, wie bei Ein- und Ausrückungen. Es sei Π das Gewicht des massiven Kegels, β der Winkel, welchen die Erzeugungslinie der Kegelfläche mit ihrer Axe bildet, R die vermittelst des Hebels auf den Kopf des massiven Kegels ausgeübte Kraft, f' der Koefficient der Reibung des massiven Kegels auf seiner Axe und f der Koefficient der Reibung zwischen beiden Kegeln; so ist die auf den Kopf des Kegels wirklich ausgeübte Kraft:

$$R - f'\Pi.$$

Die Summe der von dem massiven auf den hohlen Kegel ausgeübten Normaldruckkräfte, welche hier dieselbe Rolle spielt, wie $2P$ in der vorhergehenden Theorie, wird nach dem Obigen ausgedrückt durch:

$$\frac{R - f'\Pi}{\sin\beta + f\cos\beta},$$

und folglich die gegenseitige Reibung der beiden Kegel:

$$\frac{f(R - f'\Pi)}{\sin\beta + f\cos\beta}.$$

Wenn der Winkel β sehr klein ist, so reducirt sich dieser Werth nahezu auf:

$$R - f'\Pi.$$

Wenn P die Summe der Normaldruckkräfte bezeichnet, so hat man nach dem eben Gesagten:

$$P = \frac{R - f'\Pi}{\sin\beta + f\cos\beta},$$

folglich:

$$R = f'\Pi + P(\sin\beta + f\cos\beta).$$

Wenn man die Kraft R' haben will, welche erfordert wird, um den massiven Kegel zurückzuziehen, so muß man in dieser letzten Formel zugleich die Zeichen von R, f' und f verändern, wodurch man erhält:

$$R' = f'\Pi + P(f\cos\beta - \sin\beta),$$

und folglich wenn man P eliminirt:

$$R' = f'\Pi + (R - f'\Pi)\cdot\frac{f\cos\beta - \sin\beta}{f\cos\beta + \sin\beta}.$$

Da man in den gewöhnlichen Fällen, den massiven Kegel während der Rotationsbewegung des hohlen Kegels in letztern schiebt, und die Geschwindigkeit des hohlen Kegels weit größer ist, als die des massiven; so folgt, daß die gegenseitige Reibung der beiden Kegel in einer nahezu auf der Richtung der Kraft $R - f'\Pi$ senkrechten Ebene statt findet, und folglich der Komponente $P\sin\beta$ des Normaldruckes nicht mehr zu Hülfe kommt, so daß man alsdann das Glied $f\cos\beta$ in dem Nenner des Ausdruckes von P hinweglassen kann, wodurch man nahezu erhält:

$$P = \frac{R - f'\Pi}{\sin\beta}$$

und:

$$fP = \frac{f(R - f'\Pi)}{\sin\beta}.$$

Gewöhnlich macht man wenigstens $\sin\beta = \frac{1}{10}$, und wenn man für gewöhnliche Fälle $f = 0{,}28$ nimmt; so erhält man für die Reibung der beiden Kegel an einander:

$$fP = 5{,}60\,(R - f'\Pi).$$

Wenn man den massiven Kegel aus dem hohlen zurückzieht, so wirkt die Reibung nach der Längenrichtung, und man hat wie weiter oben:

$$R' = f'\Pi + P(f\cos\beta - \sin\beta),$$

oder, wenn man für P seinen jetzigen Werth $\frac{R - f'\Pi}{\sin\beta}$ setzt:

$$R' = f'\Pi + (R - f'\Pi)\left(\frac{f}{\operatorname{tang}\beta} - 1\right).$$

Reibung der dreikantigen Schraube.

§. 64. Die Reibung in dem Gewinde der dreikantigen Schraube ließe sich näherungsweise mit Hülfe einer gewissen Analogie mit

einem zwischen zwei geneigten Ebenen befindlichen Keile berechnen; allein es ist genauer, die Rechnung direkt anzustellen.

Wir wollen die Fläche des Schraubenganges oder Gewindes auf eine einzige mittlere Schraubenlinie reducirt annehmen, die Schraubenaxe sei vertikal, und wir wollen annehmen, daß auf das System die folgenden drei Kräfte wirken: 1) zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte **R**, welche an den Enden eines horizontalen Hebels wirken und die Schraube drehend zu heben suchen; 2) eine Kraft **P**, welche in vertikaler Richtung von oben nach unten auf den Kopf der Schraube wirkt und den Widerstand bildet, und 3) die Druckkräfte, welche die Schraubenmutter in normaler Richtung auf die Fläche des Schraubengewindes ausübt, so wie die Reibungen auf dieser Fläche, welche nach tangentialen Richtungen an der mittlern Schraubenlinie wirken. Wir wollen mit **Q** die Summe der Normaldruckkräfte auf das Schraubengewinde bezeichnen, so ist fQ die Summe der Tangentialreibungen, welche, wie wir sogleich sehen werden, hier in Betracht gezogen werden müssen, obgleich sie nach verschiedenen Richtungen wirken, weil sie mit der Axe der Schraube alle dieselben Winkel bilden, und worauf sie projicirt werden müssen, oder nach welcher man ihre Komponente nehmen muß. Es bezeichne α den Neigungswinkel der Schraubenlinie gegen die Horizontalebene und β den Winkel, welchen die Erzeugungslinie der Schraubenfläche mit derselben Ebene bildet. Der auf die Schraubenfläche ausgeübte Druck wirkt nach der Richtung der Normale, d. h. nach der Richtung einer geraden Linie, welche zugleich auf der Schraubenlinie und auf der Erzeugungslinie der Schraubenfläche senkrecht ist. Um den Winkel kennen zu lernen, welchen diese Normale mit der vertikalen Axe der Schraube bildet, wollen wir sie auf drei rechtwinklige Axen beziehen, wovon die eine, nämlich die Axe der z mit der Axe der Schraube zusammenfällt, während die Axe der x durch den Punkt der Schraubenfläche geht, worin die betrachtete Normale errichtet ist. Die Kosinus der Winkel, welche die Erzeugungslinie der Schraubenfläche mit den Koordinatenaxen der x, y, z bildet, sind alsdann:

$$\cos\beta = a, \quad 0 = b, \quad \sin\beta = c$$

und die Kosinus der Winkel, welche dieselben Axen mit der Tangente an der Schraubenlinie in diesem in der Ebene der zx liegenden Punkte bilden, sind:

$$0 = a', \quad \cos\alpha = b', \quad \sin\alpha = c'.$$

Wenn aber eine gerade Linie auf zwei anderen zugleich senkrecht ist, welche mit den Koordinatenaxen Winkel bilden, deren Kosinus a, b, c und a', b', c' sind; so bildet sie mit denselben Axen Winkel, deren Kosinus resp. ausgedrückt werden durch:

$$\frac{bc'-cb'}{\sqrt{(ab'-ba')^2+(ca'-ac')^2+(bc'-cb')^2}},$$

$$\frac{ca'-ac'}{\sqrt{(ab'-ba')^2+(ca'-ac')^2+(bc'-cb')^2}},$$

$$\frac{ab'-ba'}{\sqrt{(ab'-ba')^2+(ca'-ac')^2+(bc'-cb')^2}}.$$

Die Normale bildet also mit der Axe der y einen Winkel, dessen Kosinus durch:

$$\frac{\cos\beta\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta\sin^2\alpha}}, \text{ oder } \frac{\cos\beta\,\mathrm{tang}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tang}^2\alpha\cos^2\beta}},$$

und mit der Axe der z einen Winkel, dessen Kosinus durch:

$$\frac{\cos\beta}{\sqrt{1+\mathrm{tang}^2\alpha\cos^2\beta}}$$

ausgedrückt wird. Die Reibung auf der Schraubenfläche, welche nach der Richtung der Tangente an der Schraubenlinie wirkt, bildet mit der Axe der Schraube oder mit der Axe der z einen Winkel, dessen Kosinus $=\sin\alpha$ ist.

Zum Gleichgewichte sämmtlicher auf die Schraube wirkender Kräfte wird unter andern Bedingungen auch die erfordert, daß die Summe der Komponenten nach der Vertikale Null sei, welches gibt:

$$\mathrm{P}=\frac{\mathrm{Q}\cos\beta}{\sqrt{1+\mathrm{tang}^2\alpha\cos^2\beta}}-f\mathrm{Q}\sin\alpha. \qquad (1)$$

Wir wollen nun die Momente in Beziehung auf die Axe der z nehmen. Wenn x, y, z die Koordinaten eines Punktes sind, auf welchen eine Kraft F wirkt, die mit den Koordinatenaxen die Winkel λ, μ, ν bildet; so ist das Moment dieser Kraft in Beziehung auf die Axe der z:

$$\mathrm{F}(x\cos\mu-y\cos\lambda)$$

und für den Normaldruck Q hat man:

$$\cos\mu=\frac{\cos\beta\,\mathrm{tang}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tang}^2\alpha\cos^2\beta}}.$$

Wenn der Angriffspunkt der Kraft Q auf der Axe der x in der Entfernung r vom Anfangspunkte liegt, so ist $y=0$, $x=r$ und das Moment von Q ist folglich:

$$\frac{Qr\cos\beta\,\mathrm{tang}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tang}^2\alpha\cos^2\beta}}.$$

Wenn man annimmt, daß die an jedem Ende des Hebels wirkende Kraft R auch um die Länge r von der Axe der Schraube entfernt ist, so ist die Gleichung der Momente, wenn man den gemeinschaftlichen Faktor r hinwegläßt:

$$2R = Q\,\frac{\cos\beta\,\mathrm{tang}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tang}^2\alpha\cos^2\beta}} + fQ\cos\alpha. \qquad (2)$$

Eliminirt man Q zwischen den Gleichungen (1) und (2), so findet man:

$$2R = P\,\frac{\cos\beta\,\mathrm{tang}\,\alpha + f\cos\alpha\sqrt{1+\mathrm{tang}^2\alpha\cos^2\beta}}{\cos\beta - f\sin\alpha\sqrt{1+\mathrm{tang}^2\alpha\cos^2\beta}}. \qquad (3)$$

Dieses ist die Relation zwischen der auf den Kopf der Schraube wirkenden Kraft P und der an jedem Ende des Drehungshebels der Schraube wirkenden Kraft R, wo diese Kraft R auf die der mittlern Schraubenlinie, worauf die Reibung wirkend angenommen werden kann, entsprechende Entfernung von der Axe der Schraube bezogen ist. Diese Formel gibt die für die Schraube mit vierkantigem Gewinde oder für den Keil auf der schiefen Ebene wieder (§. 63), wenn man darin $\beta = 0$ setzt; denn alsdann hat man:

$$2R = P\,\frac{\mathrm{tang}\,\alpha + f}{1 - f\,\mathrm{tang}\,\alpha}.$$

Wenn die Reibung Null wäre, so hätte der Winkel β auf die Kraft R keinen Einfluß mehr; denn setzt man in der allgemeinen Formel $f = 0$, so findet man:

$$2R = P\,\mathrm{tang}\,\alpha.$$

Wenn der Winkel β sehr groß wird, so wird die Kraft R ebenfalls sehr beträchtlich, weil der Nenner ihres Ausdruckes sehr klein wird, und die Werthe von β, α, f können so beschaffen sein, daß R unendlich groß wird, d. h. daß die Schraube nicht bewegt werden kann, wie groß die Bewegungskraft R auch sein mag.

Wenn man durch die Bewegung der Schraube vermittelst der Kräfte R nicht mehr den Widerstand P überwinden will, sondern wenn man diese Kräfte R in entgegengesetztem Sinne wirken läßt, um die Schraube in der Richtung der Kraft P niederwärts zu bewegen; so sind R, P Bewegungskräfte und nur die Reibung ist eine Widerstandskraft. In diesem Falle muß man in den vorhergehen-

den Formeln das Zeichen von f und R verändern, und wenn man alsdann die Zeichen beider Theile der Gleichung in die entgegengesetzten verwandelt; so erhält man:

$$2R = P.\frac{f\cos\alpha\sqrt{1+\tang^2\alpha\cos^2\beta}-\cos\beta\tang\alpha}{\cos\beta+f\sin\alpha\sqrt{1+\tang^2\alpha\cos^2\beta}}.$$

Wenn der Winkel β sehr klein ist, so kann man $\cos\beta = 1$ und:

$$\sqrt{1+\tang^2\alpha\cos^2\beta} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

nehmen, wodurch man die bekannte Formel:

$$2R = P.\frac{f-\tang\alpha}{1+f\tang\alpha},$$

für die vierkantige Schraube erhält.

Wenn dagegen der Winkel β sehr groß ist, so wird $\cos\beta$ sehr klein, und wenn man $\cos\beta\tang\alpha$ gegen $f\cos\alpha$ vernachlässigen kann; so erhält man:

$$2R = P\frac{f\cos\alpha}{\cos\beta+f\sin\alpha},$$

und man sieht, daß in diesem Falle die Kraft R mit f zunimmt.

Berechnung der Reibung in der Schraube ohne Ende.

§. 65. In der Schraube ohne Ende beschreiben die Punkte der Schraube und des Zahnes des Rades, welche einander berühren, Kreise, die in auf einander senkrechten Ebenen liegen, und die Winkelgeschwindigkeiten müssen so beschaffen sein, daß die nach der gemeinschaftlichen Normale auf den einander berührenden Flächen zerlegten wirklichen Geschwindigkeiten einander gleich sind. Die eine Berührungsfläche ist die des Schraubengewindes und die Normale derselben bildet mit der Axe der Schraube einen Winkel α, dessen Tangente $= \frac{h}{2\pi r}$ ist, wo h die Höhe des Schraubenganges oder die Schraubenweite und r den von der Axe der Schraube nach dem Berührungspunkte gehenden Radius bezeichnet. Wenn ω die Rotationsgeschwindigkeit der Schraube bezeichnet, so ist $r\omega$ die wirkliche Geschwindigkeit des der Schraube angehörenden Berührungs- oder Reibungspunktes und die wirkliche Geschwindigkeit des Berührungspunktes des Rades ist $= r'\omega'$, wo r' den nach dem Berührungspunkte gehenden Radius und ω'

die Winkelgeschwindigkeit des Rades bezeichnet. Da die Komponenten dieser beiden Geschwindigkeiten nach der Normale der Schraubenfläche einander gleich sein müssen, so hat man:

$$r\omega \sin\alpha = r'\omega' \cos\alpha$$

und die Geschwindigkeit des Gleitens, welche die Resultante aus den auf einander senkrechten Geschwindigkeiten $r\omega$, und $r'\omega'$ sein muß, ist folglich gleich:

$$r\omega \sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha},$$

oder:

$$\frac{r\omega}{\cos\alpha}.$$

Wenn P den Normaldruck in dem Berührungspunkte bezeichnet, so ist die Reibung $=fP$, und wenn R die in der Entfernung des mittlern Schraubenfadens von der Axe der Schraube auf diese wirkende Kraft bezeichnet; so hat man die bekannte Relation:

$$R = P\sin\alpha + fP\cos\alpha,$$

folglich:

$$P = \frac{R}{\sin\alpha + f\cos\alpha}.$$

Die durch die Reibung konsumirte Quantität Arbeit wird durch das Integral:

$$\int \frac{fPr\omega dt}{\cos\alpha},$$

oder:

$$\int \frac{fRr\omega dt}{\cos\alpha(\sin\alpha + f\cos\alpha)}$$

ausgedrückt. Wenn T die in einer gewissen Zeit auf die Schraube übertragene Arbeit bezeichnet, so hat man:

$$T = \int Rr\omega dt,$$

und wenn T_1 die durch die Reibung konsumirte Quantität Arbeit bezeichnet, so hat man:

$$T_f = \frac{fT}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha + f\cos^2\alpha},$$

woraus man ſieht, daß der Arbeitsverluſt nahezu $=T$ iſt, wenn der Winkel α ſehr klein wird, ſo daß von der auf die Schraube übertragenen Arbeit nur eine ſehr geringe Quantität auf das Rad übertragen und der größte Theil durch die Reibung konſumirt wird.

Bei der Ableitung dieſer Formel haben wir angenommen, daß der Berührungspunkt eine ſolche Lage hat, daß die Geſchwindigkeit des Rades nahezu zu der Axe der Schraube parallel iſt; aber wenn ſie dagegen etwas geneigt wäre, ſo erhielte man für die Geſchwindigkeit des Gleitens in dem Sinne des Halbmeſſers des Rades ein Glied mehr, welche Komponente wir in den obigen Rechnungen unberückſichtigt gelaſſen haben.

Wir wollen nun annehmen, daß der Winkel, welchen die Geſchwindigkeit des dem Rade angehörigen Berührungspunktes mit der Axe der Schraube bildet, in Rechnung gebracht werden ſoll. Es bezeichne ϑ' dieſen Winkel, r' den nach dem Berührungspunkte gehenden Radius, ϑ den zu gleicher Zeit von der Schraube beſchriebenen Winkel und r den nach dem Berührungspunkte der Schraube gehenden Radius; ſo haben wir, da die Normalgeſchwindigkeiten auf der Schraubenfläche einander gleich ſein müſſen:

$$d\vartheta . r\sin\alpha = r' d\vartheta' . \cos\vartheta' . \cos\alpha. \qquad (A)$$

Die Geſchwindigkeit des Gleitens iſt aber:

$$= \sqrt{r^2 d\vartheta^2 + r'^2 d\vartheta'^2},$$

oder:

$$= r d\vartheta \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\alpha . \frac{1}{\cos^2\vartheta'}}.$$

Ferner kann man $1+\vartheta'^2$ für $\frac{1}{\cos^2\vartheta'}$ ſetzen, und alsdann hat man:

$$r d\vartheta \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\alpha + \vartheta'^2 \operatorname{tang}^2\alpha};$$

aber da:

$$1 + \operatorname{tang}^2\alpha > 10\,\vartheta'^2 \operatorname{tang}^2\alpha$$

iſt, ſo kann man hier die Poncelet'ſche Transformation anwen-

den *) welche $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{20}$ bis auf $\frac{1}{1538}$ genau gibt, wodurch man erhält:

$$rd\vartheta . \left[\sqrt{1+\tang^2\alpha}\left(1 + \frac{\vartheta' \tang\alpha}{20\sqrt{1+\tang^2\alpha}}\right)\right],$$

oder wenn man den Bruch $\frac{1}{20}$ allgemein mit β bezeichnet:

$$\frac{rd\vartheta}{\cos\alpha}(1+\beta\vartheta'\sin\alpha).$$

Integrirt man die Gleichung (A), so erhält man:

$$r\vartheta\sin\alpha = r'\sin\vartheta\cos\alpha, \text{ oder } r\vartheta\tang\alpha = r'\vartheta',$$

folglich:

$$\vartheta' = \frac{r\vartheta}{r'}\tang\alpha,$$

und wenn man diesen Werth in den Ausdruck der Geschwindigkeit des Gleitens substituirt, so hat man:

$$\frac{rd\vartheta}{\cos\alpha} + \beta rd\vartheta\frac{r\vartheta}{r'}\tang^2\alpha.$$

Hiernach findet man, wenn man den Ausdruck für das Arbeitselement integrirt:

$$\frac{fR}{(\sin\alpha+f\cos\alpha)}\cdot\frac{r\vartheta}{\cos\alpha} + \beta\frac{fR}{(\sin\alpha+f\cos\alpha)}\cdot\frac{r^2\vartheta^2}{2r'}\tang^2\alpha,$$

und da:

$$Rr\vartheta = T, \quad \frac{\vartheta r}{r'} = \vartheta', \quad \vartheta = \frac{2\pi}{n}$$

ist, wo n die Anzahl der Zähne des Rades bezeichnet, so erhält man endlich für den Ausdruck der verlorenen Quantität Arbeit:

$$\frac{fT}{\cos\alpha(\sin\alpha+f\cos\alpha)} + \beta\frac{fT}{\sin\alpha+f\cos\alpha}\tang\alpha.\frac{\pi}{n}.$$

---

*) Poncelet's Lehrbuch der Anwendung der Mechanik auf Maschinen. Bd. I. Seite 283 bis 296.

Steifigkeit der Seile.

§. 66. Man hat gefunden, daß eine gewisse Arbeit erforderlich ist, um ein Seil um eine Welle zu legen oder überhaupt in eine krumme Linie zu biegen, während die Arbeit, welche zum Abwickeln oder Gerademachen des Seiles erfordert wird, unmerklich ist.

Um eine Länge von 1 Meter von einem Seile von dem Durchmesser d auf eine Welle oder Rolle von dem Halbmesser R zu wickeln, wird eine Quantität Arbeit erfordert, welche der Größe:

$$\frac{d^\mu}{R}(a+bP)$$

proportional ist, wo P die Zugkraft bezeichnet, welche auf der Seite des Aufwickelns oder Auflegens des Seiles an demselben wirkt; d. h. es muß auf dieser Seite unabhängig von andern Umständen eine Zugkraft an dem Seile wirken, welche ausgedrückt wird durch:

$$P+\frac{d^\mu}{R}(a+bP),$$

wo die Koefficienten a, b durch Beobachtungen bestimmt werden müssen. Man hat diese Formeln bis zu Spannungen von 500 Kilogrammen verificirt. Für noch etwas neue Seile ist der Exponent $\mu=1{,}80$ und für alte Seile $=1{,}40$. Man kann denselben gewöhnlich $=1{,}70$ nehmen, und für ein Seil von $0^m{,}02$ im Durchmesser hat man:

$$ad^{1,70}=0{,}1112,\quad bd^{1,70}=0{,}00487.$$

Für ein getheertes Seil von 30 Litzen und $0^m{,}023$ im Durchmesser ist:

$$ad^\mu=0{,}1748,\quad bd^\mu=0{,}00627.$$

Für getheerte Seile berechnet man die Koefficienten ad^μ, bd^μ nicht nach dem Durchmesser, sondern nach diesen letzten Zahlen und nach Verhältniß der Anzahl der Litzen, woraus das Seil besteht.

Es ist eine Ruhezeit von 5 bis 6 Minuten erforderlich, damit das Seil denselben Widerstand hervorbringt für die Biegung und keinen größern Widerstand für eine Biegung in entgegengesetztem Sinne annimmt, wie dieses häufig geschieht.

Wenn über eine Rolle oder Welle von dem Halbmesser R mit Zapfen von dem Halbmesser r ein Seil gelegt ist, woran eine

Bewegungskraft P und eine Widerstandskraft P_1 wirken, so hat man, wenn f den Koefficienten der Zapfenreibung bezeichnet:

$$PR = P_1R + (P+P_1)\frac{fr}{\sqrt{1+f^2}} + (a+bP_1)d^\mu,$$

woraus folgt, wenn man $\frac{f}{\sqrt{1+f^2}} = f'$ setzt:

$$P_1 = \frac{P\left(1-f'\frac{r}{R}\right) - \frac{ad^\mu}{R}}{1+f'\frac{r}{R}+\frac{bd^\mu}{R}}.$$

Wenn also T die auf der einen Seite des Seiles wirkende Bewegungsarbeit ist, und h die Höhe bezeichnet, um welche sich jeder Punkt des Seiles auf dieser Seite niederwärts bewegt hat; so wird die an dem andern Ende des Seiles wirkende Widerstandsarbeit ausgedrückt durch:

$$\frac{T\left(1-f'\frac{r}{R}\right) - \frac{ad^\mu}{R}h}{1+f'\frac{r}{R}+\frac{bd\mu}{R}},$$

und der Verlust an Arbeit ist daher kleiner, je größer die Kraft P ist.

Ein Seil muß mit keinem größern Gewichte, als 40 Kilogr. für die Litze, oder ungefähr 3,000,000 d^2 Kilogr., oder 300 d^2 Kilogrammen, je nachdem der Durchmesser d desselben in Metern oder in Centimetern ausgedrückt ist, belastet werden.

Wenn man der Kürze wegen setzt:

$$\frac{1-f'\frac{r}{R}}{1+f'\frac{r}{R}+b\frac{d\mu}{R}} = \alpha \quad \text{und} \quad \frac{\frac{ad^\mu}{R}}{1+f'\frac{r}{R}+b\frac{d^\mu}{R}} = \beta,$$

so hat man:

$$P_1 = \alpha P - \beta.$$

Wenn man eine Reihe ähnlicher Rollen hätte, so findet man:

$$P_2 = \alpha P_1 - \beta,$$
$$P_3 = \alpha P_2 - \beta,$$
etc.,

und folglich:

$$P_n = \alpha^n P - \beta\left(\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}\right).$$

Die übertragene Arbeit kann also zuletzt Null werden, was statt finden würde, wenn man $\alpha^n P\,(1-\alpha) = \beta\,(1-\alpha^n)$, folglich:

$$n = \frac{\log\left[\frac{1}{P\frac{(1-\alpha)}{\beta}+1}\right]}{\log\alpha}$$

hätte.

Wenn z. B. $R = 0{,}10$, $r = 0{,}007$, $d = 0{,}02$, $f = 0{,}15$, folglich $f' = 0{,}14$ ist, so hat man nahezu:

$$\frac{ad\mu}{R} = 1{,}112, \quad \frac{bd\mu}{R} = 0{,}048,$$

und folglich:

$$\alpha = 0{,}93, \quad \beta = 1{,}05.$$

Also:

$$P_1 = 0{,}93\,P - 1^k{,}05,$$

und für 8 Rollen hätte man:

$$P_8 = 0{,}595\,P - 6^k{,}54.$$

Wenn $R = 0{,}15$, $r = 0{,}01$, $d = 0{,}04$ und das Seil wieder ein ungetheertes ist; so braucht man die vorhergehenden Werthe von $\frac{ad\mu}{R}$, $\frac{bd\mu}{R}$ nur mit $2^{1{,}80} \times \frac{10}{15} = 2{,}32$ nahezu zu multipliciren, wodurch man erhält:

$$\frac{ad\mu}{R} = 2{,}580, \quad \frac{bd\mu}{R} = 0{,}111,$$

$$f'\,\frac{r}{R} = 0{,}0093,$$

folglich:

$$\alpha = 0{,}88 \text{ und } \beta = 2{,}30,$$

mithin:

$$P_1 = 0{,}88P - 2^k{,}30$$

und für 8 Rollen:

$$P_8 = 0{,}57P - 8^k{,}23.$$

Bei Flaschenzügen wäre die Widerstandskraft Q nicht = nP, sondern:

$$Q = P_1 + P_2 + P_3 \ldots + P_n,$$

und wenn man für P_1, P_2, etc. ihre Werthe setzt:

$$Q = P\alpha\frac{(1-\alpha^n)}{1-\alpha} - \frac{n\beta}{1-\alpha} + \frac{\alpha\beta}{1-\alpha}\cdot\frac{(1-\alpha^n)}{1-\alpha},$$

oder auch:

$$Q = a\frac{(1-\alpha^n)}{1-\alpha}P - \frac{\beta}{1-\alpha}\cdot\left[n - \alpha\frac{(1-\alpha^n)}{(1-\alpha)}\right].$$

Für einen Flaschenzug von 8 Rollen, wie die in dem ersten vorhergehenden Beispiele hätte man:

$$Q = 5{,}80P - 35^k{,}57, \text{ statt } Q = 8P,$$

und für Rollen, wie die im zweiten Beispiele:

$$Q = 3{,}15P - 92^k{,}97, \text{ statt } Q = 8P.$$

Wenn man ein Seil zur Uebertragung der Bewegung einer Welle auf eine andere anwendet, so muß die Spannung auf der Seite, wo sie am kleinsten ist, den vierten Theil der durch die zu übertragende Arbeit bestimmten Kraft betragen. Wenn also R', R'' die Halbmesser der beiden Räder, ω', ω'' ihre Winkelgeschwindigkeiten und T die der ersten Welle mitgetheilte Quantität Arbeit bezeichnen; so wird der von der Steifigkeit des Seiles herrührende Verlust an Arbeit ausgedrückt durch:

$$\omega' R'.\left[\frac{d^\mu}{R'}\left(a + \frac{5bT}{4\omega' R'}\right) + \frac{d^\mu}{R''}\left(n + \frac{bT}{4\omega' R'}\right)\right].$$

Wenn man den von der Steifigkeit des Seiles und von den Reibungen an den Axen herrührenden Totalverlust an Arbeit mit dem vergleichen will, welcher statt fände, wenn zur Uebertragung der Bewegung zwischen zwei in derselben Ebene liegenden horizontalen Wellen ein Zahnräderwerk angewandt würde; so muß man zu dem vorhergehenden Ausdrucke noch den hinzufügen, welcher den

durch die Reibungen auf den beiden Axen entsprechenden Verlust ausdrückt, und die Summe mit dem Ausdrucke vergleichen, welcher den analogen Verlust an Arbeit für das Räderwerk ausdrückt.

Bei der Anwendung des Seiles hat man zunächst für die Reibungen, wenn die Zapfen der beiden Wellen einander völlig gleich sind und einen Halbmesser ρ haben, und π', π'' die Gewichte der beiden Wellen bezeichnen:

$$\omega' \frac{\rho f}{\sqrt{1+f^2}} \sqrt{\left(\pi' + \frac{T}{\omega' R}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\frac{T}{\omega' R}\right)^2}$$

$$+\omega'' \frac{\rho f}{\sqrt{1+f^2}} \sqrt{\left(\pi'' + \frac{TR''}{\omega' R' R'''}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\frac{T}{\omega' R'}\right)^2},$$

wo R der Radius für den Punkt, auf welchen die Bewegungskraft der ersten Welle und R''' der Radius für den Punkt ist, worin die Widerstandskraft der zweiten Welle wirkt. Wenn dagegen eine Verzahnung angewandt wird, so hat man:

$$T/\pi \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right).$$

Wenn die Seile vertikal sind oder die Räder übereinander liegen, so hat man für den von den Reibungen der vier Zapfen, welche gegen die Räder eine symmetrische Lage haben, herrührenden Verlust an Arbeit:

$$\omega \frac{f\rho}{\sqrt{1+f^2}} \left[\pi' + \frac{T}{\omega' R} + \frac{3T}{\omega' R'} - \pi'' + \frac{TR''}{\omega' R' R'''}\right],$$

oder:

$$\omega \frac{f\rho}{\sqrt{1+f^2}} \left[\pi' - \pi'' + \frac{3T}{\omega' R'} + \frac{T}{\omega' R} + \frac{TR''}{\omega' R' R'''}\right],$$

oder wenn π'' größer ist, als die Summe der Kräfte $\frac{T}{\omega' R'}$, $\frac{TR''}{\omega' R' R'''}$:

$$\omega \frac{f\rho}{\sqrt{1+f^2}} \left[\pi' + \pi'' + \frac{T}{\omega' R} - \frac{TR''}{\omega' R' R'''}\right].$$

Rollende Reibung.

§. 67. Wenn die Materialien, woraus die einander berührenden Körper bestehen, nicht sehr fest oder hart sind, so findet bei dem Uebereinanderhinrollen dieser Körper ein Verlust an Arbeit statt, welcher von der Zusammendrückung in dem Berührungs-

punkte herrührt, und es gibt Fälle, wo man diese rollende Reibung nicht unberücksichtigt lassen darf.

Wir wollen uns einen Cylinder A (Fig. 16) denken, welcher auf einer horizontalen Ebene fortrollt und auf dieselbe einen so starken Druck ausübt, daß sie an der Berührungsstelle B etwas zusammengedrückt wird; so muß offenbar der Beweger eine gewisse Arbeit anwenden, um diese Zusammendrückung successive in allen Berührungspunkten zu bewirken. Wir wollen annehmen, daß die Kraft des Bewegers eine an der Axe des Cylinders angebrachte horizontale Zugkraft sei, so können wir uns vorstellen, daß auf den Cylinder während seiner Bewegung eine Widerstandskraft von unten nach oben, oder von C nach D nach der geraden Linie CD wirkt, die von einem etwas vor dem tiefsten Punkte des Eindruckes liegenden Punkte in geringer Entfernung vor der Axe des Cylinders hindurchgeht. Selbst wenn die Ebene B aus einer sehr elastischen Substanz bestände und nach dem Durchgange des Cylinders ihre ursprüngliche Form wieder annähme, so würde doch ein Verlust an Arbeit statt finden, wie die Erfahrung lehrt; und was man sich erklären kann, wenn man bemerkt, daß die hinter dem Cylinder durch die Wiedererhebung der Vertiefung der Ebene entstehende geringe bewegende Kraft nur dann eine Bewegungsarbeit hervorbringen könnte, welche der vor dem Cylinder durch die Zusammendrückung konsumirten Arbeit gleich wäre, wenn die im Innern der Masse hervorgerufenen Erschütterungen nach dem Vorübergange des Cylinders völlig aufgehört hätten, was nicht statt finden kann, weil sich diese Erschütterungen fortpflanzen.

Die rollende Reibung ist für harte Metalle und Hölzer nur sehr gering und wird desto beträchtlicher, je kleiner der Durchmesser des Cylinders ist, was man sich leicht erklären kann, wenn man bemerkt, daß der Eindruck durch den Cylinder an der Berührungsstelle mit der Ebene um so merklicher wird, je kleiner der Durchmesser des Cylinders ist, und daß folglich daraus auch für eine gewisse auf der Ebene durchlaufene Länge zuletzt eine größere Konsumtion an Arbeit entspringt. In den Lehrbüchern der praktischen Mechanik findet man die wichtigsten Erfahrungsresultate über die Bestimmung der rollenden Reibung *).

Durch den Stoß verursachte Verluste an Arbeit.

§. 68. Die zweite Aufgabe dieser Art, welche man bei praktischen Anwendungen zu lösen hat, bezieht sich auf den Stoß zweier Rotationssysteme, wovon auch als besonderer Fall das eine statt der drehenden Bewegung eine fortrückende haben kann, und

*) Poncelet's Lehrbuch der Anwendung der Mechanik auf Maschinen §. 193 und folgg.

es kann z. B. vorkommen, daß man die Arbeitsverluste zu bestimmen hat, welche durch den Stoß des Hebedaumens eines Rades oder einer Welle gegen die Hebelatte eines dadurch zu bewegenden Hammers oder Stampfers verursacht werden. Um den durch den Stoß zweier Rotationssysteme verursachten Verlust an Arbeit zu berechnen, muß man eine Voraussetzung machen, unter welcher dieser Verlust den größten Werth bekommt, und welche mit weiter keinem Nachtheile verbunden ist, während man die entgegengesetzte Voraussetzung nicht unbedingt würde machen können. Diese Voraussetzung besteht darin, daß man die zusammenstoßenden Körper als unelastisch betrachtet, so daß sie nach dem Stoße mit einander in Berührung bleiben. Man bestimmt also um wie viel die lebendige Kraft in dem Augenblicke vermindert ist, wo die beiden Körper einander berühren, sich wie zwei Systeme von unveränderlicher Form mit einander fortbewegen und gewissermaßen nur eine Maschine bilden. Es seien:

ω_0, ω die Winkelgeschwindigkeiten der Daumenwelle vor und nach dem Stoße,

ω_0', ω' dieselben Geschwindigkeiten für die Hammerwelle,

R, R' die von den Rotationsaxen nach dem Berührungspunkte gezogenen Radien,

ϑ, ϑ' die Winkel, welche dieselben mit der Berührungsebene in dem Berührungspunkte der beiden Systeme bilden,

ρ, ρ' die Halbmesser der Zapfen beider Wellen,

λ die dem Normaldrucke im Berührungspunkte entsprechende Quantität Bewegung,

f, f' die Koefficienten der Zapfenreibungen,

f_1 der Koefficient der in dem Berührungspunkte beider Systeme stattfindenden Reibung,

P, Q die Quantitäten Bewegung für die Zapfen der Daumenwelle,

P', Q' dieselben Größen für die Hammerwelle,

x, y die Koordinaten eines beliebigen Punktes des ersten Systemes, indem die Axe der x zu der Tangente in dem Zusammenstoßungspunkte parallel ist,

x', y' die Koordinaten eines beliebigen Punktes des zweiten rotirenden Systemes,

dm, dm' die Massenelemente dieser beiden Systeme,

K, K' die Trägheitsmomente dieser beiden Systeme,

ξ', η' die Koordinaten des Schwerpunktes des zweiten Systemes,

Π, Π' die resp. Gewichte beider Systeme; so hat man für das erste System die drei Gleichungen (§. 52):

$$\left.\begin{aligned}(\omega-\omega_0)\int x\,dm &= -\lambda+Q\\ -(\omega-\omega_0)\int y\,dm &= +f_1\lambda+P\\ (\omega-\omega_0)\frac{K}{g} &= \lambda R\cos\vartheta+f_1\lambda R\sin\vartheta-\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\rho\sqrt{P^2+Q^2}\end{aligned}\right\}.(A)$$

Das Glied $\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\sqrt{P^2+Q^2}$ drückt die Reibung aus, wenn die Resultante aus dem Drucke und aus der Reibung $=\sqrt{P^2+Q^2}$ ist; denn alsdann muß der Winkel, welchen diese Kraft mit der Richtung des Druckes bildet, dem Reibungswinkel gleich sein, dessen Tangente f ist, und die Tangentialkomponente von $\sqrt{P^2+Q^2}$ oder die Reibung ist das Produkt aus diesem Ausdrucke und dem Sinus des Winkels, dessen Tangente f ist.

Für das zweite System hat man ebenso:

$$\left.\begin{aligned}(\omega'-\omega'_0)\int x'\,dm' &= +\lambda+Q'\\ -(\omega'-\omega'_0)\int y'\,dm' &= -f_1\lambda+P'\\ (\omega'-\omega'_0)\frac{K'}{g} &= -\lambda R'\cos\vartheta'+f_1\lambda R'\sin\vartheta'-\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}\rho'\sqrt{P'^2+Q'^2}\end{aligned}\right\}.(B)$$

Diese sechs Gleichungen geben die Größen λ, P, Q, P', Q' und eine Gleichung mit ω und ω'.

Da die beiden Systeme nach dem Stoße mit einander in Berührung bleiben sollen, so sind die Normalgeschwindigkeiten in dem Berührungspunkte einander gleich, und man hat folglich noch die Gleichung:

$$\omega R\cos\vartheta=\omega' R'\cos\vartheta',$$

so daß man die Geschwindigkeiten ω, ω' und die lebendige Kraft nach dem Stoße bestimmen kann.

Wenn wir zunächst für den einfachsten Fall annehmen, daß die Schwerpunkte beider Systeme auf den Rotationsaxen liegen, daß $\omega'=0$ ist, und daß die Reibungen nicht in Betracht gezogen werden; so haben wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned}-\lambda+Q&=0\\ P&=0,\\ (\omega-\omega_0)\frac{K}{g}&=\lambda R\cos\vartheta\\ -\lambda&=Q',\\ 0&=P'\\ \omega'\frac{K'}{g}&=-\lambda R'\cos\vartheta',\end{aligned}$$

woraus sich ergibt, wenn man λ eliminirt:

$$(\omega - \omega_0)\frac{K}{g} R'\cos\vartheta' + \omega'\frac{K'}{g} R\cos\vartheta = 0,$$

und da $\omega R\cos\vartheta = \omega' R'\cos\vartheta'$ ist; so findet man:

$$\omega\frac{K}{g} R'\cos\vartheta' - \omega_0\frac{K}{g} R'\cos\vartheta' + \frac{\omega R^2\cos^2\vartheta}{R'\cos\vartheta'}\cdot\frac{K'}{g} = 0,$$

woraus folgt:

$$\omega = \frac{\omega_0 K R'^2\cos^2\vartheta'}{KR'^2\cos^2\vartheta' + K'R^2\cos^2\vartheta},$$

und ebenso fände man:

$$\omega' = \frac{\omega_0 K R R'\cos\vartheta\cos\vartheta'}{KR'^2\cos^2\vartheta' + K'R^2\cos^2\vartheta}.$$

Wenn man der Kürze wegen $R\cos\vartheta = p$, $R'\cos\vartheta' = p'$ setzt, so hat man:

$$\omega = \frac{\omega_0 K}{K + K'\frac{p^2}{p'^2}}, \quad \omega' = \frac{\omega_0 K\frac{p}{p'}}{K + K'\frac{p^2}{p'^2}},$$

woraus folgt, daß die lebendige Kraft nach dem Stoße ist:

$$\frac{K\omega^2 + K\omega'^2}{2g} = \frac{\frac{\omega_0^2}{2g}\cdot K^2\left(K + K'\frac{p^2}{p'^2}\right)}{\left(K + K'\frac{p^2}{p'^2}\right)^2} = \frac{\omega_0^2}{2g}\cdot\frac{K^2}{K + K'\frac{p^2}{p'^2}}.$$

Vor dem Stoße war dieselbe aber $= \frac{\omega_0^2}{2g} K$, und folglich hat sie sich in dem Verhältnisse von K zu $K + K'\frac{p^2}{p'^2}$, d. h. in dem Verhältnisse der lebendigen Kräfte geändert, welche das stoßende System und die beiden vereinigten Systeme haben würden, wenn das zweite durch das erste geführt würde.

Der Verlust an lebendiger Kraft wird ausgedrückt durch:

$$\frac{K\omega_0^2}{2g} \cdot \frac{K' \frac{p^2}{p'^2}}{K + K' \frac{p^2}{p'^2}}.$$

und derselbe verhält sich folglich zu der lebendigen Kraft vor dem Stoße, wie die lebendige Kraft, welche das gestoßene System haben würde, wenn es durch das andere geführt würde, zu der lebendigen Kraft beider Systeme.

Wenn in dieser Voraussetzung das gestoßene System gegen das andere, wovon es fortbewegt wird, eine geringere lebendige Kraft haben müßte; so könnte $K' \frac{p^2}{p'^2}$ gegen K vernachlässigt werden, und man hätte für den Verlust an lebendiger Kraft den Ausdruck:

$$K' \frac{p^2}{p'^2} \cdot \frac{\omega_0^2}{2g};$$

aber alsdann wäre die Geschwindigkeit, welche das gestoßene System annehmen würde, genau gleich $\omega_0 \frac{p}{p'}$ während das andere System nahezu seine Geschwindigkeit ω_0 beibehielte, und in diesem Falle ist also der Verlust an lebendiger Kraft der ganzen lebendigen Kraft gleich, welche das gestoßene System annimmt.

Wenn man ω'_0 nicht $= o$ gesetzt hätte, so hätte man gefunden, daß der durch den Stoß verursachte Verlust an lebendiger Kraft ausgedrückt wird durch:

$$\frac{KK'}{2g} \cdot \frac{\left(\omega'_0 - \omega_0 \frac{p}{p'}\right)^2}{K + K' \frac{p^2}{p'^2}},$$

oder:

$$\frac{K\omega_0^2}{2g} \cdot \frac{K' \left(\omega'_0 - \omega_0 \frac{p}{p'}\right)^2}{\left(K + K' \frac{p^2}{p'^2}\right) \omega_0^2}.$$

Der Verlust an lebendiger Kraft verhält sich also zu der lebendigen Kraft des stoßenden Systemes vor dem Stoße, wie die fingirte lebendige Kraft, welche das andere System haben würde, wenn es eine Geschwindigkeit annähme, welche die Differenz zwi-

schen der ist, die dasselbe wirklich hat und zwischen der, welche es haben würde, wenn es von dem andern Systeme fortbewegt würde zu der lebendigen Kraft beider Systeme in dieser Voraussetzung.

Wenn $K' \frac{p}{p'}$ gegen K sehr klein ist, so wird der Verlust an lebendiger Kraft nahezu ausgedrückt durch:

$$\frac{K'}{2g}\left(\omega'_0 - \omega_0 \frac{p}{p'}\right)^2,$$

d. h. derselbe ist der lebendigen Kraft gleich, welche das System mit der kleinsten lebendigen Kraft haben würde, wenn es eine Geschwindigkeit hätte, welche die Differenz zwischen der seinigen und der Geschwindigkeit ist, welche es haben würde, wenn es von dem andern Systeme vor dem Stoße bewegt wäre.

Alle vorhergehenden Betrachtungen über die durch den Stoß verursachten Verluste an lebendiger Kraft in dem Falle, wo man die Reibungen nicht in Betracht zu ziehen braucht, sind auch auf fortrückende Systeme anwendbar, wenn man die Gewichte der Körper für die virtuellen lebendigen Kräfte setzt, welche wir als Koefficienten angewandt haben, um die Verluste der lebendigen Kräfte auszudrücken. In dem allgemeinern Falle, wo die Schwerpunkte der Systeme nicht auf den Drehungsaxen liegen, die Reibungen in Betracht gezogen werden und wieder wie im Vorhergehenden angenommen wird, daß die Körper nach dem Stoße mit einander in Berührung bleiben, muß man die vollständigen Gleichungen (A), (B) anwenden.

Die Rechnungen werden aber fast unausführbar, wenn man die von den Wurzelgrößen herrührenden Schwierigkeiten nicht beseitigt, was auf zwei verschiedene Arten geschehen kann, indem man nämlich Q, Q' so bestimmt, als wenn keine Reibung statt fände, die gefundenen Werthe in diese Gleichungen substituirt und die Rechnung wiederholt, oder die Poncelet'sche Methode anwendet, welche darin besteht, daß man die Wurzelgröße $\sqrt{P^2+Q^2}$ näherungsweise durch den linearen Ausdruck $\alpha P + \beta Q$ oder $Pr\cos\psi + Qr\sin\psi$ darstellt, worin α, β oder r, ψ so gewählte Konstanten sind, daß der größte wahrscheinliche numerische Fehler nach einer vorläufigen Beurtheilung der Grenzen, zwischen welchen das Verhältniß $\frac{P}{Q}$ liegt, wo P und Q absolute Zahlenwerthe ohne Zeichen sind, ein Minimum wird.

Auf diese Weise findet man:

für $\frac{P}{Q} > 1$, $r\cos\psi = \alpha = 0{,}96$, $r\sin\psi = \beta = 0{,}40$, Fehler $\frac{1}{25}$

$\frac{P}{Q} > 2$, 0,98, 0,23, $\frac{1}{71}$

$\frac{P}{Q} > 3$, 0,99, 0,16, $\frac{1}{154}$

$\frac{P}{Q} > 4$, 0,99, 0,12, $\frac{1}{266}$

Wir wollen nun diese Methode auf den Stoß der Daumen einer Welle gegen den Helm eines Schmiedehammers anwenden, indem wir annehmen, daß sich der Hammer vor dem Stoße in Ruhe befindet, und der Schwerpunkt des Systemes der Daumenwelle in der Drehungsaxe derselben liegt, und folglich setzen:

$$r(P\cos\psi + Q\sin\psi) \text{ für } \sqrt{P^2+Q^2}$$

und:

$$r(P'\cos\psi + Q'\sin\psi) \text{ für } \sqrt{P'^2+Q'^2},$$

indem r, ψ so angenommen werden, daß der begangene Fehler innerhalb der Grenzen zwischen welche das Verhältniß $\frac{P}{Q}$ fallen kann, ein Minimum wird.

Zur Bestimmung der Bewegung nach dem Stoße hat man für die Daumenwelle:

$$0 = -\lambda + Q$$
$$0 = +f_1\lambda + P$$
$$(\omega - \omega_0)\frac{K}{g} = \lambda R\cos\vartheta + f_1\lambda R\sin\vartheta - \frac{rf\rho(P\cos\psi + Q\sin\psi)}{\sqrt{1+f^2}},$$

für den Hammer:

$$\frac{\omega'\Pi'\xi'}{g} = \lambda + Q'$$
$$-\frac{\omega'\Pi'\eta'}{g} = -f_1\lambda + P'$$
$$\frac{\omega'K'}{g} = -\lambda R'\cos\vartheta' + f_1\lambda R'\sin\vartheta' - \frac{rf'\rho'(P'\cos\psi + Q'\sin\psi)}{\sqrt{1+f'^2}}$$

und für beide Systeme:

$$\omega R\cos\vartheta = \omega' R'\cos\vartheta',$$

welche ſieben Gleichungen die ſieben unbekannten Größen P, Q, P′, Q′, λ, ω, ω′ beſtimmen. Es ergibt ſich daraus:

$$Q = \lambda,$$

$$P = -f_1\lambda,$$

$$(\omega - \omega_0)\frac{K}{g} = \lambda R(\cos\vartheta + f_1\sin\vartheta) + \frac{rf\rho\lambda(f_1\cos\psi - \sin\psi)}{\sqrt{1+f^2}},$$

$$Q' = \frac{\omega'\Pi'\xi'}{g} - \lambda,$$

$$P' = f_1\lambda - \frac{\omega'\Pi'\eta'}{g},$$

$$\frac{\omega'K'}{g} = -R'(\cos\vartheta' - f_1\sin\vartheta') - \frac{rf'\rho'\lambda(f_1\cos\psi - \sin\psi)}{\sqrt{1+f'^2}} - \frac{rf\rho\omega\Pi}{g}(\xi'\sin\psi - \eta'\cos\psi),$$

und wenn man ſetzt:

$$f_1 = \operatorname{tang}\varphi_1,\ f = \operatorname{tang}\varphi,\ f' = \operatorname{tang}\varphi',$$
$$\eta = l'\sin\mu, \quad \text{und} \quad \xi' = l'\cos\mu,$$

ſo erhält man:

$$(\omega - \omega_0)\frac{K}{g} = \lambda R\frac{\cos(\vartheta - \varphi_1)}{\cos\varphi_1} - \frac{rf\rho\lambda}{\sqrt{1+f^2}}\cdot\frac{\sin(\varphi_1 - \psi)}{\cos\varphi_1},$$

$$\frac{\omega'K'}{g} = -\lambda R'\frac{\cos(\vartheta' + \varphi_1)}{\cos\varphi_1} - \frac{rf'\rho'\lambda}{\sqrt{1+f'^2}}\cdot\frac{\sin(\varphi_1 - \psi)}{\cos\varphi_1} - \frac{rf'\rho'\Pi'l'\omega'\sin(\psi - \mu)}{g},$$

und:

$$\omega R\cos\vartheta = \omega' R'\cos\vartheta'.$$

Wenn man λ zwiſchen den beiden erſten Gleichungen eliminirt, ſo bekommt man:

$$\frac{(\omega - \omega_0)K}{\omega'K' + rf'\rho'\Pi'l'\omega'\sin(\psi - \mu)} = \frac{rf\rho\sin(\varphi_1 - \psi) - R\cos(\vartheta - \varphi_1)\sqrt{1+f^2}}{R'\cos(\vartheta' + \varphi_1)\sqrt{1+f'^2} + rf'\rho'\sin(\varphi_1 - \psi)} \times \frac{\sqrt{1+f'^2}}{\sqrt{1+f^2}},$$

und wenn man den zweiten Theil dieſer Gleichung der Kürze wegen mit $-\alpha$ bezeichnet; ſo erhält man:

$$\omega K + \alpha\omega' [K' + rf' \rho' \Pi' l' \sin(\psi - \mu)] = K\omega_0 ,$$

und:

$$\omega R \cos\vartheta - \omega' R' \cos\vartheta' = 0.$$

Setzt man ebenso zur Abkürzung $rf'\varphi'\Pi' l' = \beta$, so kommt:

$$K\omega + \alpha(K' + \beta)\omega' = K\omega_0 ,$$
$$R\cos\vartheta . \omega - R' \cos\vartheta' \omega' = 0 ,$$

woraus folgt:

$$\omega' = \frac{KR\omega_0 \cos\vartheta}{KR' \cos\vartheta' + R\alpha(K' + \beta)\cos\vartheta}$$

und:

$$\omega = \frac{KR'\omega_0 \cos\vartheta'}{KR' \cos\vartheta' + R\alpha(K' + \beta)\cos\vartheta} .$$

Um den durch den Stoß verursachten Verlust an lebendiger Kraft zu erhalten, braucht man nur den Ausdruck:

$$\frac{K\omega_0^2}{2g} - \frac{K\omega^2}{2g} - \frac{K'\omega'^2}{2g}$$

zu berechnen. Substituirt man die obigen Werthe in denselben, so findet man:

$$\frac{K\omega_0^2}{2g}\left[1 - \frac{R^2\cos^2\vartheta + R'^2\cos^2\vartheta'}{\left[R'\cos\vartheta' + \frac{\alpha(K'+\beta)}{K} R\cos\vartheta\right]^2}\right].$$

Wenn man die Quadrate der Brüche f, f_1 und f', welche die Verhältnisse der Reibungen zu den bei dem Stoße entstehenden Quantitäten Bewegung in normaler Richtung ausdrücken, vernachlässigt; so erhält man:

$$\alpha\left(\frac{K'}{K} + \beta\right) = \frac{K'R\cos\vartheta}{KR'\cos\vartheta'} .$$

Statt für jeden Körper die Gleichungen der Aequivalenz zu nehmen, könnte man eine einzige Gleichung für das ganze System nehmen, welche seiner Konstitution nach dem Stoße entspricht, und dann diese Aequivalenz durch das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten ausdrücken, indem man für die Geschwindigkeiten die nach dem Stoße statt findenden nähme. Die virtuellen Momente der

beiden Reibungen wären alsdann offenbar nach Verrichtung aller Reduktionen von der Form Fdf gewesen, wo F die Stärke der Reibung und df die Trennungsgeschwindigkeit der Berührungspunkte am Ende des Stoßes ist. Nun ist aber leicht einzusehen, daß diese Geschwindigkeit $df = 0$ ist, wenn der Punkt worin der Stoß statt findet auf der Mittelpunktslinie liegt, und daß diese Geschwindigkeit sehr klein ist, wenn dieser Punkt nur wenig von dieser Linie entfernt ist. Denn da alsdann die wirklichen Geschwindigkeiten dieser Punkte dieselbe Richtung haben, und ihre Komponenten nach der gemeinschaftlichen Normale auf den beiden Berührungsflächen einander gleich sind, so müssen sie selbst auch einander gleich sein, und folglich ist die relative Geschwindigkeit df der beiden Berührungspunkte gleich Null.

Zu demselben Resultate würde man durch die einzelnen Gleichungen gelangt sein, welche die Aequivalenz für jeden Körper ausdrücken, wenn man bemerkt, daß in diesem Falle die Momente der Quantität der Bewegung, deren Komponenten λ und λf_1 sind, in den beiden Systemen der Momentengleichungen den Perpendikeln p und p' proportional sind, so daß man diese Momente aus den Momentengleichungen eliminirt, wie wenn die Glieder $f_1\lambda$ nicht existirten.

Es gibt einen besondern Fall, wo die Quantitäten der Bewegung P' und Q' Null sind, nämlich wenn die Richtung der von dem Stoße herrührenden Quantität Bewegung durch den sogenannten Mittelpunkt des Stoßes geht. Wir wollen diese Voraussetzung in den vorhergehenden Gleichungen, welche sich auf den Hammer beziehen, annehmen, und die Koordinatenaxen so annehmen, daß die Axe der η' die Richtung der Resultante aus λ und $f_1\lambda$ ist. Alsdann haben wir, wenn wir die Komponenten der bei dem Stoße auf die Zapfen wirkenden Quantitäten der Bewegung einander gleich setzen:

$$(\omega' - \omega'_0)\frac{\Pi'}{g}\eta' = \lambda\sqrt{1+f_1^2}$$

$$-(\omega' - \omega'_0)\frac{\Pi'}{g}\xi' = 0.$$

Die zweite dieser Gleichungen giebt $\xi' = 0$, d. h. der Schwerpunkt liegt in dem auf die Richtung des Stoßes $\lambda\sqrt{1+f_1^2}$ gefällten Perpendikel, und wenn man alsdann die Gleichung der Momente bildet, woraus das Glied mit $\sqrt{P^2+Q^2}$ verschwindet, so hat man:

$$(\omega' - \omega'_0)\frac{K'}{g} = \lambda\sqrt{1+f_1^2}.l,$$

wo l das von der Axe auf die Richtung der Resultante $\lambda\sqrt{1+f_1^2}$ gefällte Perpendikel bezeichnet. Aus dieser und der ersten der beiden vorhergehenden Gleichungen ergibt sich:

$$l = \frac{K'}{\Pi' \eta'},$$

welches die Entfernung der Rotationsaxe von der durch den Punkt, worin die Berührung statt findet, gehenden gerade Linie ist, deren Richtung mit der Richtung der durch den Stoß hervorgebrachten Quantität Bewegung $\lambda\sqrt{1+f_1^2}$ zusammenfällt.

Der Punkt, welcher auf dem durch den Schwerpunkt des Systemes gehenden Radiusvektor in der Entfernung l von der Drehungsaxe liegt, wird der Mittelpunkt des Stoßes des Systemes genannt, und es kann einen solchen Punkt nur dann geben, wenn der Schwerpunkt des Systemes nicht auf der Drehungsaxe liegt. Wenn K'_1 das Trägheitsmoment des Systemes in Beziehung auf eine durch seinen Schwerpunkt gehende und zu der Drehungsaxe parallele Axe bezeichnet, so hat man:

$$K' = K'_1 + \Pi' \eta'^2, \text{ folglich: } l = \eta' + \frac{K'_1}{\Pi' \eta'},$$

woraus man sieht, daß der Mittelpunkt des Stoßes immer jenseits des Schwerpunktes liegt, und derselbe ist der Drehungsaxe am nächsten, wenn man hat:

$$\eta' = \sqrt{\frac{K'_1}{\Pi'}}, \text{ folglich: } l = 2\eta' = 2\sqrt{\frac{K'_1}{\Pi'}}.$$

Das Vorhergehende läßt sich auf das Einrammen der Pfähle anwenden. Es bezeichne p das Gewicht des Rammklotzes, p' das des einzurammenden Pfahles, v_0 die Geschwindigkeit des Rammklotzes in dem Augenblicke, wo derselbe den Pfahl erreicht und v die Geschwindigkeit desselben Klotzes am Ende des Stoßes, und endlich bezeichne R den veränderlichen Widerstand des Pfahles, welcher während der ganzen Dauer des Einsenkens desselben wirkt. Zunächst wollen wir annehmen, daß die Kraft R während der Dauer des Stoßes des Rammklotzes gegen den Pfahl bis zu dem Augenblicke, wo das Ende des Pfahles die Geschwindigkeit des Rammklotzes annimmt, noch nicht gewirkt habe, d. h. daß die Bewegung noch nicht auf das Ende des Pfahles übertragen sei, und daß, wenn diese Bewegung übertragen ist, auch der Stoß vollendet sei, so daß der Pfahl die Geschwindigkeit des Rammklotzes angenommen hat. Unter dieser Voraussetzung findet man, daß der Pfahl und der Rammklotz nach dem Stoße die Geschwindigkeit:

$$v = \frac{pv_0}{p+p'},$$

und folglich die lebendige Kraft:

$$(p+p')\frac{v^2}{2g}, \text{ oder: } \frac{p^2}{p+p'}\cdot\frac{v_0^2}{2g}$$

haben. Soll aber dieſe lebendige Kraft durch den Widerſtand R des Bodens aufgehoben werden, ſo muß man haben:

$$\frac{p^2}{p+p'}\cdot\frac{v_0^2}{2g}\int \mathrm{R}dx,$$

wo dx das Element des vertikalen Eindringens des Pfahles in den Boden bezeichnet. Wenn H die ganze Höhe ausdrückt, von welcher der Rammklotz herabgefallen und h die Höhe iſt, um welche der Pfahl eingeſchlagen iſt, alſo $h = \int dx$; ſo hat man nahezu, wenn man annimmt, daß ſich R während des Eindringens des Pfahles nicht merklich ändert:

$$\frac{p^2}{p+p'}\mathrm{H} = \int_0^h \mathrm{R}dx = \mathrm{R}h,$$

woraus folgt:

$$\mathrm{R} = \frac{p^2}{p+p'}\cdot\frac{\mathrm{H}}{h}.$$

Wenn R deſto größer wird, je tiefer der Pfahl in den Boden eindringt, oder wenigſtens konſtant bleibt, und R_1 bezeichnet den letzten Werth von R, welcher folglich der größte iſt; ſo hat man:

$$\int \mathrm{R}dx = \text{ oder } < \mathrm{R}_1 h;$$

alſo:

$$\mathrm{R}_1 = \text{ oder } > \frac{p^2}{p+p'}\cdot\frac{\mathrm{H}}{h}.$$

In der vorhergehenden Vorausſetzung wäre alſo der Widerſtand des Bodens am Ende jedes Stoßes wenigſtens dem Produkte $\frac{p^2}{p+p'}\cdot\frac{\mathrm{H}}{h}$ gleich, und der Pfahl könnte mit einem durch dieſes Produkt ausgedrückten Gewichte belaſtet werden, ohne tiefer in den Boden einzudringen. Wenn z. B. der Rammklotz 500 Kilogr. wiegt, und von einer Höhe von 4 Meter auf einen eichenen Pfahl von 300 Kilogr. Gewicht fällt, welcher bei jedem Schlage um $0^m{,}004$ eingetrieben wird; ſo iſt $\mathrm{R}_1 > 312500$ Kilogr. Dieſes Reſultat beruht aber auf einer Vorausſetzung, deren Richtigkeit nicht erwieſen und ſogar zweifelhaft iſt. Wenn man alſo, um die Unterſuchung nicht zu beſchränken, annimmt, daß die Kraft R während der Dauer des Stoßes gewirkt hat, und daß $\int \mathrm{R}dt$ die dieſer Kraft

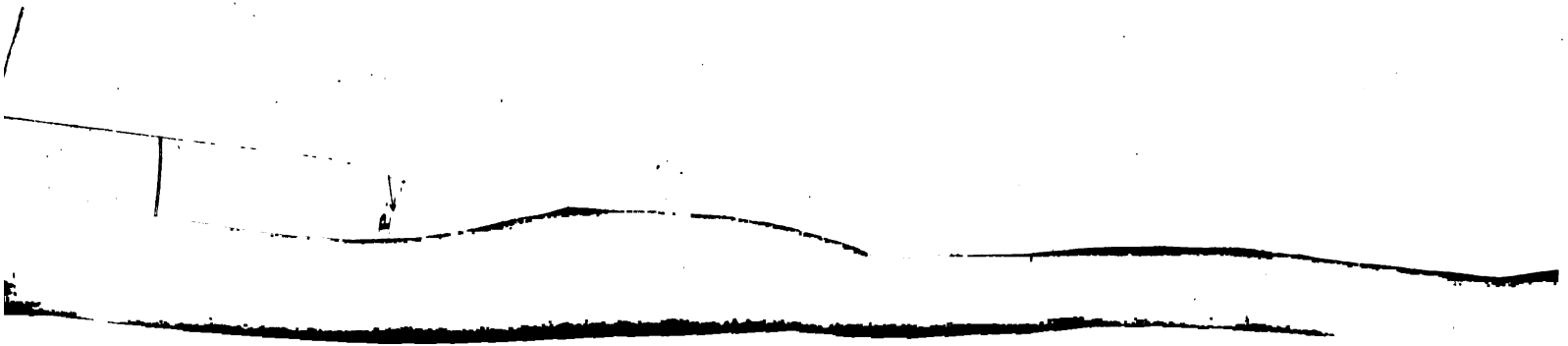
entſprechende Quantität der Bewegung für die Dauer des Stoßes ausdrückt; ſo hat man:

$$p(v-v_0)=p'v+\int \mathrm{R}dt,$$

woraus folgt:

$$v=\frac{pv_0-\int \mathrm{R}dt}{p+p'}.$$

Die lebendige Kraft des Syſtemes nach dem Stoße iſt folglich:

$$\frac{(pv_0-\int \mathrm{R}dt)^2}{p+p'}, \quad \text{und} \quad \frac{(pv_0-\int \mathrm{R}dt)^2}{p+p'}=\int \mathrm{R}dx=\mathrm{R}_1 h.$$

Dieſe Gleichung würde für R_1 einen kleinern Werth, als der vorhergehende geben; allein man hat kein Mittel, den Werth von R_1 aus dieſer Gleichung abzuleiten, indeſſen zeigt ſie doch wenigſtens, daß es nicht vortheilhaft ſein würde, wenn man auf den Pfahl eine größere Laſt, als $\frac{p^2}{p+p'}\cdot\frac{\mathrm{H}}{h}$ wollte wirken laſſen, und daß man dieſe Laſt in der Praxis ſogar kleiner nehmen müßte.